Fyzika v astrofyzice

Poznámky k přednášce

Tento text obsahuje studijní materiály k úvodní části přednášky z astrofyziky (F 788) konané na Astronomickém ústavu Univerzity Karlovy v Praze. Soubor s textem je dostupný na *World-Wide-Web*u.

1997

1.1 Mechanika

V této kapitole se hovoří o Keplerových zákonech, jejich vztahu k Newtonovu gravitačnímu zákonu, a o dráhových elementech používaných k popisu pohybu kosmických těles.

Johannes Kepler (1571–1630) odvodil na základě pozorování polohy planety Mars (Tycho Brahe) tři věty popisující pohyb tělesa (planety) v centrálním gravitačním poli (Slunce):[1]

1. Průvodič vedený od Slunce k planetě opisuje ve stejných dobách stejné plochy.
2. Planety obíhají kolem Slunce v elipsách, v jejichž společném ohnisku se nachází Slunce.
3. Čtverce dob oběžných dvou planet mají se k sobě tak jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

Tyto věty byly poprvé otištěny v Keplerově knize *Astronomia Nova* (r. 1609) a *Harmonices Mundi* (r. 1619). Ukážeme si, jak lze z uvedených tří vět dospět k Newtonovu gravitačnímu zákonu.

Z důvodu symetrie uvažovaného problému je pohyb rovinný (to je ostatně řečeno v druhé větě).

Matematické vyjádření prvního zákona (zachování momentu hybnosti):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{w} \equiv \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \mathrm{const.} \tag{1.1}$$

Tudíž zrychlení (a tedy i odpovídající síla) leží na spojnici obou těles, tzn. jsou centrální:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a} = 0 \tag{1.2}$$

Platí:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| &= |\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\phi)| = |r\boldsymbol{r}_\circ \times \boldsymbol{v}_r + r\boldsymbol{r}_\circ \times \boldsymbol{v}_\phi| \\ &= |r\boldsymbol{r}_\circ \times \dot{r}\boldsymbol{r}_\circ + r\boldsymbol{r}_\circ \times r\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_\circ| = |r^2\dot{\phi}\boldsymbol{w}_\circ| = \mathrm{const} \equiv \mathcal{B}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\phi = \dot{r}\boldsymbol{r}_\circ + r\dot{\boldsymbol{r}}_\circ = \dot{r}\boldsymbol{r}_\circ + r\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_\circ; \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_\phi = \ddot{r}\boldsymbol{r}_\circ + \dot{r}\dot{\boldsymbol{r}}_\circ + \dot{r}\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_\circ + r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\boldsymbol{\phi}_\circ. \tag{1.5}$$

[1] Hmotnost planety m je mnohem menší než hmotnost Slunce $M_\odot$, takže ji lze považovat za testovací částici pohybující se v předem pevně zadaném poli centrálního tělesa. Pohyb dvou těles o srovnatelné hmotnosti (např. složky dvojhvězdy) lze popsat rovnicemi stejného tvaru, přejdeme-li k těžišťové soustavě a redukovaným hmotnostem.

Odtud

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}_\circ - r\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 \boldsymbol{r}_\circ = \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathcal{B}^2}{r^3}\right)\boldsymbol{r}_\circ. \tag{1.6}$$

Nyní k tvaru dráhy. Rovnici elipsy lze zapsat v obvyklém značení[2] ve tvaru

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon\cos\phi}, \quad \epsilon \equiv \frac{e}{a},\ p \equiv \frac{b^2}{a}, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{p\epsilon\dot{\phi}}{(1-\epsilon\cos\phi)^2} \\ &= -\frac{\epsilon}{p} r^2\dot{\phi}\sin\phi, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\epsilon}{p}\left[\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\phi}\right)}_{=0}\sin\phi + r^2\dot{\phi}^2\cos\phi\right] \\ &= -\frac{\epsilon}{p}\frac{\mathcal{B}^2}{r^2}\cos\phi. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dosadíme z rov. (1.9) do (1.6):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_r &= -\frac{\mathcal{B}^2}{r^2}\left(\frac{\epsilon}{p}\cos\phi + \frac{1}{r}\right)\boldsymbol{r}_\circ \\ &= -\frac{\mathcal{B}^2}{r^2}\left[\frac{\epsilon}{p}\cos\phi + \frac{1}{p}(1-\epsilon\cos\phi)\right] = -\frac{\mathcal{B}^2}{pr^2}\boldsymbol{r}_\circ, \end{aligned} \tag{1.10}$$

tzn.

$$\boldsymbol{a}_r = -\frac{\text{const}}{r^2}\boldsymbol{r}_\circ \equiv -\frac{\mathcal{C}}{r^2}\boldsymbol{r}_\circ. \tag{1.11}$$

Mezi plochou eliptické dráhy S a odpovídající oběžnou dobu T platí vztah (viz rov. [1.1]–[1.3])

$$S = \pi ab = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}T = \pi\sqrt{a^3 p}, \tag{1.12}$$

kde $b^2 = a^2(1-\epsilon^2) = ap$. (Hlavní poloosu a elipsy nezaměňovat s velikostí vektoru zrychlení $|\boldsymbol{a}|$.) Podle třetího Keplerova zákona tedy

$$\text{const} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{\mathcal{B}^2}. \tag{1.13}$$

[2] Excentricita ϵ a velká poloosa a dráhy souvisí se vzdáleností pericentra (t.j. perihélia v případě planet v naší sluneční soustavě) r_{per} a apocentra (afélia) r_{af} takto: $r_{\text{per}} = a(1-\epsilon)$, $r_{\text{af}} = a(1+\epsilon)$

To znamená, že konstanta v rov. (1.11) má stejnou hodnotu pro všechny planety sluneční soustavy.

Síla působící od Slunce na planetu je tedy dána vzorcem $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_r = m\mathcal{C}r^{-2}\boldsymbol{r}_\circ$. Z hlediska Slunce musí být síla stejně velká, ale opačně orientovaná, a tudíž $\mathcal{C} = -GM_\odot$ ($G = \mathrm{const}$):

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{M_\odot m}{r^2}\,\boldsymbol{r}_\circ. \tag{1.14}$$

Příklad: určení $\mathcal{C}$ na základě pohybu Měsíce (Newtonova metoda).

$$\begin{aligned}
a \approx r &\doteq 60\,R_\mathrm{z} \doteq \frac{4\times10^9\times60}{2\pi}\,\mathrm{cm},\\
T &\doteq 27,3\,\mathrm{dne} \doteq 2\,360\,600\,\mathrm{s},\\
a_\mathrm{m}\frac{4\pi^2 a}{T^2} &\doteq 0,27\,\mathrm{cm/s^2}\ \text{(zrychlení udílené Zemí Měsíci)};
\end{aligned}$$

zrychlení g přepočtené na vzdálenost rovnou R_z:

$$g = a_\mathrm{z}\left(\frac{r}{R_\mathrm{z}}\right)^2 \doteq 987\,\mathrm{cm/s^2}.$$

Můžeme tedy soudit, že pohyb Měsíce je určen stejnou příčinou jako pád kamenů u zemského povrchu.

Zapišme rovnici elipsy v kartézských souřadnicích

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1, \tag{1.15}$$

kde $x = a\cos\bar\omega$, $y = a\sin\bar\omega$ ($\bar\omega$ označuje excentrickou anomálii).

Mezi polárními a kartézskými souřadnicemi na elipse platí vztah:

$$r\cos\phi = x - a\epsilon = a(\cos\bar\omega - \epsilon) \tag{1.16}$$

$$r\sin\phi = y = b\sin\bar\omega \tag{1.17}$$

Diferencováním

$$\cos\phi\,\mathrm{d}r - r\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = -a\sin\bar\omega\,\mathrm{d}\bar\omega \tag{1.18}$$

$$\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = -b\cos\bar\omega\,\mathrm{d}\bar\omega \tag{1.19}$$

Kombinací rovnic (1.16)×(1.19)−(1.17)×(1.18):

$$\underbrace{r^2\,\mathrm{d}\phi}_{\mathcal{B}\mathrm{d}t} = ab(1-\epsilon\cos\bar\omega)\,\mathrm{d}\bar\omega. \tag{1.20}$$

Integrací s počáteční podmínkou $\bar\omega_{|(t=0)} = 0$ dostaneme Keplerovu rovnici

$$nt = \bar\omega - \epsilon\sin\bar\omega, \quad n \equiv \frac{\mathcal{B}}{ab}; \tag{1.21}$$

n má význam středního pohybu planety (levá strana rovnice je úměrná t).

V astronomické terminologii se zavádí veličiny (dráhové elementy)

veličina	význam	hodnota pro Zemi
Ω	délka výstupného uzlu	—
i	sklon dráhy	—
$\bar{\omega}$	argument perihelu	—
a	velká poloosa dráhy	$149,6 \times 10^6\,\mathrm{km}$
e	excentricita dráhy	0,0167
T_0	okamžiku průchodu perihelem	$\approx$ 3. ledna

To je šest integračních konstant pohybu. Veličiny Ω, i a $\bar{\omega}$ se uvádějí k dané epoše (mění se v důsledku precese). V reálném případě (s dráhovými poruchami) se rovněž využívají orbitální parametry, ale v tom případě jsou pomalu se měnícími funkcemi času.

V řeči energie E, momentu hybnosti l, gravitačního potenciálu V a efektivního potenciálu V_{eff} lze psát

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) \\ &= \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{\mathrm{eff(r,l)}}} \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ze vztahu (1.22) pro energii máme

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V\right] - \frac{l^2}{m^2r^2}}, \tag{1.23}$$

a tedy pro čas podél dráhy

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V\right] - \frac{l^2}{m^2r^2}}}. \tag{1.24}$$

Pro azimutální úhel máme $\mathrm{d}\phi = l\,\mathrm{d}t/mr^2$,

$$\phi = \int \frac{lr^{-2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2m\left[E - V\right] - \frac{l^2}{r^2}}}. \tag{1.25}$$

Dosud jsme nijak nespecifikovali tvar potenciálu $V(r)$. Lze dokázat, že podmínku uzavřenosti dráhy, $\phi = 2\pi n_1/n_2$ ($n_{1,2}$ přirozená čísla), splňují pouze dvě závislosti: $V \propto 1/r$ (keplerovský potenciál) a $V \propto r^2$ (harmonický oscilátor).

Pro keplerovský potenciál $V = k/r$ ($k = \mathrm{const}$) dostaneme integrací rov. (1.25)

$$\phi = \arccos \frac{lr^{-1} - mkl^{-1}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{mk}{l}\right)^2}} + \mathrm{const}. \tag{1.26}$$

Literatura k dalšímu studiu: V. Trkal: *Mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa* (Československá akademie věd, Praha, 1956).

1.2 Termodynamika

V této kapitole se hovoří o stavové rovnici degenerovaného Fermiho plynu, v astrofyzice aplikované především na popis bílých trpaslíků a neutronových hvězd.

Zavedeme označení: n ... číselná hustota baryonů (předpokládáme, že celkový počet baryonů se zachovává); ε ... celková hustota energie (včetně klidové, ε/n je pak energie na jeden baryon); $N_i \equiv n_i/n$ ... abundance i-tého prvku.

První větu termodynamickou zapíšeme ve tvaru

$$\delta Q = \mathrm{d}\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + P\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{n}\right) - \sum \mu_i\,\mathrm{d}N_i, \tag{1.27}$$

kde $\delta Q = T\,\mathrm{d}s$ je teplo na jeden baryon vyjádřené pomocí teploty[3] a entropie na jeden baryon, P je tlak, μ_i je chemický potenciál, a $\varepsilon \equiv \varepsilon(n, s, N_i)$. Zjevně

$$P = \frac{\partial\varepsilon/n}{\partial 1/n} = n^2\,\frac{\partial\varepsilon/n}{\partial n}, \tag{1.28}$$

$$T = \frac{\partial\varepsilon/n}{\partial s}, \tag{1.29}$$

$$N_i = \frac{\partial\varepsilon/n}{\partial N_i} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial n_i}. \tag{1.30}$$

Příklad: V rovnováze platí $\sum \mu_i\,\mathrm{d}N_i = 0$, a tedy např. v reakci

$$e^- + p \rightleftharpoons n + \nu_e$$

je

$$\mathrm{d}N_e = \mathrm{d}N_p = -\,\mathrm{d}N_n = \mathrm{d}N_{\nu_e},$$

a tedy

$$\mu_e + \mu_p \rightleftharpoons \mu_n + \mu_{\nu_e}.$$

Vztah termodynamických veličin k hustotě N částic a rozdělovací funkci f částic ve fázovém prostoru:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p} = \tilde{\gamma} f \tag{1.31}$$

($\tilde{\gamma} = g/h^3$, g ... statistická váha stavu, h ... „elementární“ objem). Odtud pro jednotlivé termodynamické veličiny

[3] Jistě nehrozí nedorozumění v důsledku stejného označení teploty v této kapitole a oběžné periody v kapitole předchozí.

$$
\begin{aligned}
n &= \int \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p}\,\mathrm{d}^3p, && (1.32)\\
\varepsilon &= \int E\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p}\,\mathrm{d}^3p, \quad E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4, && (1.33)\\
P &= 1/3 \int pv\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p}\,\mathrm{d}^3p, \quad v = \frac{pc^2}{E} && (1.34)
\end{aligned}
$$

($m_0 \equiv m_e$ pro elektrony).

Rozdělovací funkci lze vyjádřit v závislosti pouze na energii,

$$
f(E) = \frac{1}{\exp[\beta(E-\mu)] \pm 1}, \quad \beta \equiv 1/kT. \tag{1.35}
$$

Příklad: Limitní tvar rozdělovací funkce pro $e^{-\beta\mu} \gg 1$, t.j. $f \to e^{\beta\mu - E}$ (Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení). V případě ideálního plynu je

$$
N = \int e^{\beta(\mu - p^2/2m)} 4\pi p^2\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p,
$$

a tudíž

$$
\begin{aligned}
e^{-\beta\mu} &= \frac{4\pi}{N}\frac{g}{h^3}\int e^{-(\beta p^2/2m)}p^2\,\mathrm{d}p\\
&= \frac{V}{N}(mkT)^3 \gg 1.
\end{aligned}
$$

Maxwellova-Boltzmannova limita tedy vyžaduje malou hustotu prostředí, $\rho \approx N/V \ll 1$, a vysokou teplotu $T \gg 1$

Pro popis kompaktních hvězd (bílý trpaslík, neutronová hvězda) je relevantní limita zcela degenerovaného Fermiho plynu: ($T \to 0$, znaménko + v rov. (1.35)). V tomto případě je

$$
f(E) = \begin{cases} 1, & E \le E_{\mathrm{F}} \\ 0, & E > E_{\mathrm{F}}, \end{cases}
$$

kde (pro elektrony) $E_{\mathrm{F}} \equiv \mu = \sqrt{p_{\mathrm{F}}^2c^2 + m_e^2c^4}$.

Tak dostáváme

$$
n_e = \frac{2}{h^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}} 4\pi p^2\,\mathrm{d}p = \frac{8\pi}{3h^3}p_{\mathrm{F}}^3 = \frac{1}{3\pi^2\lambda_e^3}\,x^3 \tag{1.36}
$$

(zavedli jsme $x \equiv p_{\mathrm{F}}/m_ec$, $\lambda_e \equiv \hbar/m_ec$). Analogicky pro elektronový tlak

$$
\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{3}\frac{2}{h^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}} \frac{p^2c^2}{E}4\pi p^2\,\mathrm{d}p\\
&= \frac{8\pi m_e^4c^5}{3h^3}\int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \;\equiv\; \frac{m_ec^2}{\lambda_e^3}\varphi(x), && (1.37)
\end{aligned}
$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left[x\sqrt{1+x^2}\left(2x^2/3-1\right) + \ln\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]\right], \tag{1.38}$$

a pro hustotu energie

$$\begin{aligned}\varepsilon_e &= \frac{2}{h^3}\int_0^{p_\mathrm{F}}\left(p^2c^2 + m_e^2c^4\right)4\pi p^2\,\mathrm{d}p \\ &\equiv \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\chi(x),\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2}\left[x\sqrt{1+x^2}\left(1+2x^2\right) - \ln\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]\right]. \tag{1.40}$$

Užitečné jsou rozvoje předchozích vztahů v nerelativistické ($x \ll 1$) a relativistické ($x \gg 1$) oblasti:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{15\pi^2}\left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9\ldots\right), & x \ll 1 \\ \frac{1}{12\pi^2}\left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2}\ln(2x)\ldots\right), & x \gg 1; \end{cases}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi^2}\left(x^3 - \frac{3}{10}x^5 - \frac{3}{56}x^7\ldots\right), & x \ll 1 \\ \frac{1}{4\pi^2}\left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2}\ln(2x)\ldots\right), & x \gg 1. \end{cases}$$

Celková hustota prostředí je i v relativistickém případě určena ionty (neplatilo by to pouze v extrémně relativistickém případě):

$$\rho_0 = \sum n_i m_i = n m_b = n_e m_\mathrm{b}/N_e \approx 10^6 x^3\,\mathrm{g/cm^3} \tag{1.41}$$

(zde $m_b \equiv n^{-1}\sum n_i m_i \approx 10^{-24}$g je střední baryonová hmotnost, $N_e = \frac{1}{2}$ pro vodík).

Z výše uvedených limitních rozvojů φ a χ nalezneme explicitní vyjádření stavové rovnice, jež má tvar polytropy:

$$P = K\rho_0^\gamma, \text{ kde } \gamma \begin{cases} 5/3, & x \ll 1\ (\rho_0 \ll 10^6\,\mathrm{g/cm^3}), \\ 4/3, & x \gg 1\ (\rho_0 \gg 10^6\,\mathrm{g/cm^3}). \end{cases}$$

Výše uvedené vztahy lze snadno upravit pro případ degenerovaného plynu neutronů, hraniční případ $x \approx 1$ však potom odpovídá $\rho \approx 10^{16}\,\mathrm{g/cm^3}$.

Zmíníme se ještě o tom, jak se celá situace změní, uvážíme-li směs neutronů, protonů a elektronů. Podstatným procesem je rozpad β, $n \to p + e + \bar{\nu}$, který může probíhat též inverzně: $e^- + p \to n + \nu$ (elektron musí mít dostatečnou energii, danou rozdílem $(m_n - m_p)c^2 \doteq 1{,}29\,\mathrm{MeV}$; záleží též na hustotě — při velké hustotě není přímý rozpad možný, protože volné stavy elektronů jsou již obsazené.) V rovnováze platí

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n, \quad (\mu_\nu \approx 0). \tag{1.42}$$

Zavedeme, jako dříve,

$$x_e = \frac{p_F^e}{m_e c}, \quad x_n = \frac{p_F^n}{m_n c}, \quad x_p = \frac{p_F^p}{m_p c}, \tag{1.43}$$

$$E_F^e = \mu_e = \sqrt{(p_F^e c)^2 + m_e^2 c^4}, \ldots, \tag{1.44}$$

$$m_e\sqrt{1+x_e^2} + m_p\sqrt{1+x_p^2} = m_n\sqrt{1+x_n^2}. \tag{1.45}$$

Z podmínky elektrické neutrálnosti plyne $n_e = n_p$, t.j.

$$\frac{1}{3\pi^2\lambda_e^3}\, x_e^3 = \frac{1}{3\pi^2\lambda_p^3}\, x_p^3 \tag{1.46}$$

$$m_e x_e = m_p x_p. \tag{1.47}$$

Pomocí rov. (1.45), (1.47) tedy lze určit $x_e \to x_p \to x_n$. Pro stavové veličiny máme

$$P = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\varphi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3}\varphi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3}\varphi(x_n), \tag{1.48}$$

$$\varepsilon = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3}\chi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3}\chi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3}\chi(x_n), \tag{1.49}$$

$$n = \frac{1}{3\pi^2\lambda_p^3}x_p^3 + \frac{1}{3\pi^2\lambda_n^3}x_n^3. \tag{1.50}$$

Nejmenší hustotu, při níž se již začínají objevovat neutrony, lze odhadnout na základě vztahu (1.45) s $x_n = 0$ (protony předpokládáme nerelativistické, tzn. s $x_p \ll 1$). Dostáváme

$$m_e\sqrt{1+x_e^2} = m_n - m_p \tag{1.51}$$

a pomocí rov. (1.46), (1.50) plyne z (1.51)

$$n = \frac{1}{3\pi^2\lambda_e^3}\left[\left(\frac{m_n - m_p}{m_e}\right)^2 - 1\right]^{3/2} \approx 10^{31}\ \mathrm{cm}^{-3}, \tag{1.52}$$

$$\rho_0 \approx n m_p \approx 10^7 \mathrm{g/cm}^3. \tag{1.53}$$

Literatura k dalšímu studiu: S. L. Shapiro & S. A. Teukolsky: *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* (Wiley-Interscience, New York, 1983).

1.3 Elektrodynamika

V této kapitole zopakujeme základní vztahy klasické elektrodynamiky a zavedeme Stokesovy parametry. Bude to tedy příprava pro pozdější kapitoly o záření v astrofyzice.

V astronomii získáváme naprostou většinu informací pomocí elektromagnetického záření. Vyjdeme proto z Maxwellových rovnic ve tvaru (fyzikální jednotky)

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{E} &= 4\pi\rho_e \quad \text{(Coulombův zákon)}, &(1.54)\\ \nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(Faradayův indukční zákon)}, &(1.55)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \quad \text{(Gilbertova podmínka)}, &(1.56)\\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \quad \text{(Maxwellův-Ampérův zákon)}. &(1.57)\end{aligned}$$

Zde ρ_e a $\boldsymbol{j}_e$ zahrnuje veškeré elektrické náboje resp. proudy v systému (vhodné např. pro popis plazmatu). Ty jsou svázány rovnicí kontinuity,

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{j}_e = 0. \tag{1.58}$$

Divergenční rovnice představují počáteční podmínky, jak je zřejmé z jejich vyjádření ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{E} - 4\pi\rho_e) &= 0, &(1.59)\\ \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) &= 0 &(1.60)\end{aligned}$$

(plus okrajové podmínky).

Zbývá zapsat Lorentzovu sílu, určující pohyb jednotlivých nábojů:

$$\boldsymbol{F}_e = q\left(\boldsymbol{E} + c^{-1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right). \tag{1.61}$$

Důsledkem (1.57) je též zákon zachování energie v elektromagnetickém poli,

$$\begin{aligned} \underbrace{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}}_{\approx\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}} &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{c}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \nabla\cdot\boldsymbol{S} &(1.62)\end{aligned}$$

Ve vakuu lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} &= c\nabla\times\boldsymbol{B}, &(1.63)\\ \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} &= -c\nabla\times\boldsymbol{E}. &(1.64)\end{aligned}$$

Diferencováním posledních dvou rovnic a jejich kombinací získáme vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 \boldsymbol{E} = 0, \tag{1.65}$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - c^2\nabla^2 \boldsymbol{B} = 0. \tag{1.66}$$

Obecné řešení vlnové rovnice lze zapsat ve tvaru retardovaného a advancovaného pole,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+(z-ct) + \boldsymbol{E}_-(z+ct), \tag{1.67}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_+(z-ct) + \boldsymbol{B}_-(z+ct). \tag{1.68}$$

Z podmínky $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ plyne, že vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou transverzální (kolmé ke směru šíření):

$$\boldsymbol{e}_z\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}_\pm}{\partial z} = \boldsymbol{e}_z\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}_\pm}{\partial z} = 0. \tag{1.69}$$

Oba vektory jsou kolmé též navzájem, protože z rov. (1.63)–(1.64) plyne

$$\boldsymbol{B}_\pm = \pm\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_\pm. \tag{1.70}$$

Dosud jsme nediskutovali vlastnosti složek E_x a E_y. K tomu účelu využijeme Fourierovu transformaci polních vektorů.

Připomenutí Fourierovy transformace: Uvažme funkci $f(x)$ z L_2, t.j.

$$\int_{-infty}^{infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty$$

. Spektrálním rozkladem označujeme transformaci

$$f(k) = \frac{1}{2\pi}\int f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int f(k)e^{ikx}\,\mathrm{d}k.$$

Formalismu spektrálního rozkladu využijeme na popis elektromagnetických vektorů, přičemž přejdeme ke komplexním proměnným $\boldsymbol{e}_\pm$ (fyzikální signál je pak reálnou částí komplexních proměnných); např.

$$\boldsymbol{E}_+(z-ct) = \int \boldsymbol{e}_+(k)e^{ik(z-ct)}\,\mathrm{d}k,$$

kde $kc = \omega = 2\pi\nu$.

Obecný tvar komplexního signálu lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{e}_+(k) = \mathcal{E}_x e^{i\phi_x}\boldsymbol{e}_x + \mathcal{E}_y e^{i\phi_y}\boldsymbol{e}_y \tag{1.71}$$

($\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$ jsou amplitudy, ϕ_x, ϕ_y odpovídající fáze — čtyři parametry potřebné k popisu vlny). Reálná část je pak

$$\boldsymbol{E}_k = \mathcal{E}_x \cos[k(z-ct)+\phi_x]\boldsymbol{e}_x + \mathcal{E}_y \cos[k(z-ct)+\phi_y]\boldsymbol{e}_y. \tag{1.72}$$

Představme si nyní pozorovatele umístěného v $z=0$:

$$\boldsymbol{E}_k = \mathcal{E}_x \cos(\omega t-\phi_x)\boldsymbol{e}_x + \mathcal{E}_y \cos(\omega t-\phi_y)\boldsymbol{e}_y. \tag{1.73}$$

Vektor $\boldsymbol{E}_k$ zřejmě opisuje elipsu. Přejdeme při jejím popisu od (x,y) k vhodnějším (x',y'), které jsou dány otočením

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{x'} \\ \boldsymbol{e}_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\chi & \sin\chi \\ -\sin\chi & \cos\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix}.$$

V nových (x',y') a s vhodnou volbou počátku t je

$$\boldsymbol{E}_k = E_1 \cos\omega t \boldsymbol{e}_{x'} + E_2 \cos\omega t \boldsymbol{e}_{y'}. \tag{1.74}$$

Přitom $\mathcal{E}_x^2+\mathcal{E}_y^2 = E_1^2+E_2^2 \equiv \mathcal{E}_0^2 \equiv \text{const}$.

Namísto výše uvedených amplitud se zavádějí vhodnější Stokesovy parametry:

$$\begin{aligned}
I &= \mathcal{E}_x^2+\mathcal{E}_y^2 = \mathcal{E}_0^2, && (1.75)\\
Q &= \mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_y^2 = I\cos\beta\cos 2\chi, && (1.76)\\
U &= 2\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y\cos(\phi_y-\phi_x) = I\cos 2\beta\sin 2\chi, && (1.77)\\
V &= 2\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y\sin(\phi_y-\phi_x) = I\sin 2\beta, && (1.78)
\end{aligned}$$

kde $\beta \equiv$ podíl poloos elipsy, $I^2 = Q^2+U^2+V^2$.

Speciální tvary vln:

(i) V monochromatické, elipticky polarizované vlně vystupuje pouze rozdíl fází, $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$.

(ii) V lineárně polarizované vlně je $V=0$.

(iii) V kruhově polarizované vlně je $Q=U=0$.

Reálná měření poskytují ustředněné hodnoty:

$$\begin{aligned}
\bar{I} &= \langle\mathcal{E}_0^2\rangle, && (1.79)\\
\bar{Q} &= \langle\mathcal{E}_x^2-\mathcal{E}_y^2\rangle, && (1.80)\\
\bar{U} &= 2\langle\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y\rangle\cos\Delta\phi, && (1.81)\\
\bar{V} &= 2\langle\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y\rangle\sin\Delta\phi. && (1.82)
\end{aligned}$$

Pokud přichází záření z většího počtu zdrojů, pak $\boldsymbol{E}_k = \sum \boldsymbol{E}_k^{(n)}$. V případě nekoherentního záření je (ze Schwartzovy nerovnosti) $\bar{I}^2 \geq \bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2$. Takové záření lze rozdělit na část nepolarizovanou ($\bar{Q}_u = \bar{U}_u = \bar{V}_u = 0$) a část plně elipticky polarizovanou ($\bar{I}_p = \sqrt{\bar{Q}_p^2 + \bar{U}_p^2 + \bar{P}_p^2}$).

V astronomii se namísto o intenzitě často hovoří o magnitudě m měřené za analyzátorem záření v určitém úhlu natočení. Odpovídající definice lze zapsat takto:

$$p_Q = m(90°) - m(0°), \tag{1.83}$$

$$p_U = m(135°) - m(45°), \tag{1.84}$$

$$p_V = m^*(135°) - m^*(45°) \tag{1.85}$$

(hvězdička označuje vložení čtvrtvlnné destičky). Význam např. p_Q je patrný ze zřejmého vztahu

$$p_Q = -2,5 \log \frac{I'(90°)}{I'(0°)}. \tag{1.86}$$

Obdobně se odvodí přibližné vztahy

$$Q/I \doteq 0.46\, p_Q, \tag{1.87}$$

$$U/I \doteq 0.46\, p_U, \tag{1.88}$$

$$V/I \doteq 0.46\, p_V, \tag{1.89}$$

které lze využít při praktickém stanovení Stokesových parametrů.

Literatura k dalšímu studiu: M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1964).

1.4 Hydrodynamika

V této kapitole uvedeme několik základních úvah o platnosti hydrodynamického přiblížení, které použijeme při popisu struktury hvězd.

Typická „pozemská“ aplikace hydrodynamických rovnic: obtékání pevného tělesa (loď, turbína, křídlo...); prostředí je elektricky neutrální. Typická „astrofyzikální“ aplikace: ionizované prostředí s důležitým vlivem gravitace, zářivého pole, velmi nestacionární.

Základní předpoklad hydrodynamiky: střední volná dráha ℓ mnohem kratší než makroskopická délková škála, L. Hydrodynamický popis přestává být adekvátní při $\ell \gtrsim L$. Dále lze zavést střední (objemovou) rychlost prostředí $\boldsymbol{u}$ a doplňkovou náhodnou složku rychlosti $\boldsymbol{w}$, takže rychlost individuální částice činí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$.

Pokud částice prostředí spolu interagují jen silami krátkého dosahu (neutrální atomy či molekuly), můžeme psát

$$\ell \approx \frac{1}{n\sigma}, \tag{1.90}$$

kde n je číselná hustota částic a σ jejich účinný průřez. V pokojových podmínkách je typicky $n \approx 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$, $\sigma \approx 10^{-15}\mathrm{cm}^2$, a tedy $\ell \approx 10^{-4}\mathrm{cm}$.

Jinak je tomu s fotony. Typická hodnota zářivého účinného průřezu (Thomsonův vzorec) je

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \approx 6,7 \times 10^{-25}\mathrm{cm}^2, \quad r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{1.91}$$

Často se zavádí zářivý účinný průřez na jednotku hustoty — opacita κ. V případě ionizovaného vodíku je $\sigma_\mathrm{T}/m_p \approx 0,4\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$. (To můžeme porovnat s „opacitou" pro rozptyl vodíkových atomů: $\sigma/m_p \approx 10^9\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{g}$... střední volná dráha fotonů bývá tudíž ve většině situací mnohem delší.)

Střední volná dráha elektricky nabitých částic je určena jejich efektivním poloměrem (sférou vlivu) r_eff, která pro elektrony činí

$$\frac{e^2}{r_\mathrm{eff}} \approx m_e w^2 \approx kT. \tag{1.92}$$

Přitom

$$\ell \approx \frac{1}{n_e \pi r_\mathrm{eff}^2} \approx \frac{m_e^2 w^2}{n_e e^4}, \tag{1.93}$$

$w \approx \sqrt{kT/m_e}$. V tomto odhadu ovšem nejsou zahrnuty rozptyly do malých úhlů (při velkém srážkovém parametru, $b \gg r_\mathrm{eff}$), které ve skutečnosti dominují (síla dalekého dosahu) faktorem $\ln\Lambda \approx b_\mathrm{max}/r_\mathrm{eff}$ (Coulombův logaritmus). Potřebujeme proto odhadnout hodnotu b_max.

Uvažme plazma složené z částic s elektrickým nábojem $Z_i e$ (ionty i-tého druhu) a elektronů. Požadavek elektrické neutrálnosti znamená

$$Z_i n_i = n_e \tag{1.94}$$

(sčítat přes i, pokud je přítomno více druhů iontů současně). Uvažme jeden iont:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho_e, \tag{1.95}$$

$$\rho_e = Z_i e\delta(\boldsymbol{r}) - n_e e\exp(e\Phi/kT) + n_i Z_i e\exp(-Z_i e\Phi/kT). \tag{1.96}$$

Pokud je elektrostatická energie, $e\Phi$, mnohem menší než termální, kT, rozvineme exponenty do prvních dvou členů a užijeme podmínku (1.94). Obě exponenty se pak redukují na člen

$$\frac{1}{4\pi} L_D^{-2}\Phi, \quad L_D^{-2} = \frac{4\pi e^2}{kT}\left(n_e + Z_i^2 n_i\right), \tag{1.97}$$

kde L_D označuje Debyeovu délku. Rov. (1.96) lze pak přepsat do tvaru

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi Z_i e\delta(\boldsymbol{r}) + L_D^{-2}\Phi \tag{1.98}$$

s řešením

$$\Phi = \frac{Z_i e}{r} \exp\left[\frac{-r}{L_D}\right], \tag{1.99}$$

které rychle ubývá s rostoucí vzdáleností (Debyeovo stínění) a splňuje okrajové podmínky

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = 0, \quad \Phi_{|r\to 0} \approx \frac{Z_i e}{r}. \tag{1.100}$$

To znamená, že coulombický potenciál iontu je odstíněn na vzdálenosti $\gtrsim L_D$, a tedy klademe $b_{\max} \approx L_D$.

Podmínkou platnosti výše použitého rozvoje exponenciál je $n_e L_D^3 \gg 1$. To je patrné ze skutečnosti, že střední elektrostatická energie elektronů činí $e^2 n_e^{1/3}$, a tedy

$$\frac{e\Phi}{kT} \approx \left(n_e L_D^3\right)^{-2/3}. \tag{1.101}$$

Výraz $n_e L_D^3$ označuje tzv. plazmový parametr. Představu o Debyeově stínění tedy nelze použít při malé hustotě částic.

Příklad: pohyb elektronu při malé perturbaci x jeho polohy. Vzniká elektrické pole (jako v kondenzátoru) $E = 4\pi n_e e x$ a pohybová rovnice elektrony zní

$$\ddot{x} = -\frac{eE}{m_e} \equiv -\omega_p^2 x,$$

kde $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 m_e^{-1}$. Vznikají tedy harmonické kmity s plazmovou frekvencí ω_p. Odpovídající frekvence iontů je nepatrná, neboť se redukuje faktorem $\sqrt{m_i/Z_i m_e}$. Typická číselná hodnota pro ω_p je $\approx 6\times 10^4 n_e^{1/2}$ sec. Tyto oscilace vyhlazují perturbace elektronů na frekvencích $\omega < \omega_p$.

V situaci, kdy hydrodynamický režim není adekvátní, je třeba přejít k popisu pomocí kinetické teorie. Pohyb částic potom můžeme popsat jednočásticovou rozdělovací funkcí $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$. V hamiltonovském formalismu je vývoj dán hamiltoniánem H, který si v tomto případě rozdělíme na dva příspěvky — hladký člen $H_{\rm sm}$ a člen popisující (náhodné) srážky $H_{\rm ir}$:

$$H = H_{\rm sm} + H_{\rm ir}. \tag{1.102}$$

Uvažme elementární objem V_6 ve fázovém prostoru s hranicí S_5. V tom je obsaženo $f\,\mathrm{d}^3x\,\mathrm{d}^3p$ částic. Tok částic přes stěnu S_5 kolmou k x_i je

$$f\dot{x}_i = f\frac{\partial H_{\rm sm}}{\partial p_i} \tag{1.103}$$

a podobně přes stěnu kolmou ke směru p_i je to

$$f\dot{p}_i = -f\frac{\partial H_{\rm sm}}{\partial x_i}. \tag{1.104}$$

Představujeme si, že náhlé srážky mohou částice přesouvat nespojitě, a tento efekt zahrneme do srážkového členu $\mathcal{S}$, jehož explicitní tvar závisí na konkrétním podobě interakce. Tak dostaneme rovnici zachování počtu částic (Boltzmannova rovnice) ve tvaru

$$\int_{V_6} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} \left(f \, \frac{\partial H_{\mathrm{sm}}}{\partial \boldsymbol{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \left(f \, \frac{\partial H_{\mathrm{sm}}}{\partial \boldsymbol{r}} \right) \right] \mathrm{d}^3 x \, \mathrm{d}^3 p = \mathcal{S}. \tag{1.105}$$

<u>Literatura k dalšímu studiu:</u> F. F. Chen: *Úvod do fyziky plazmatu* (Academia, Praha, 1984).