Čierna diera
v homogénnom magnetickom poli.

Michal Dovčiak

Úvod.

Gravitačné a bezzdrojové elektromagnetické pole popisujeme vo všeobecnej teórii relativity pomocou Einsteinových rovníc

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

a Maxwellových rovníc

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \tag{2}$$

$$F_{[\alpha\beta;\gamma]\text{cycl.}} = 0 \quad \text{resp.} \quad {}^*F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \tag{3}$$

kde * označuje duál ($^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau}F^{\sigma\tau}$). Sú dobre známe vákuové, statické, sféricky symetrické resp. vákuové, stacionárne, axiálne symetrické riešenia Einsteinových rovníc (1) izolovaného bodového zdroja gravitácie. Jedná sa o tzv. čierne diery s hmotou M resp. s hmotou M a momentom hybnosti J. Vo všetkých týchto riešeniach je metrika asymptoticky plochá a elmg. pole nulové (v časopriestore nemáme žiadne zdroje elmg. poľa) .

Predstavme si však, že vložíme vákuovú, stacionárnu, axiálne symetrickú čiernu dieru do vonkajšieho homogénneho magnetického poľa, ktoré je rovnobežné s osou symetrie. To znamená, že riešime Einstein–Maxwellove rovnice (1)–(3) s okrajovou podmienkou, že magnetické pole je asymptoticky homogénne. Úloha to nie je jednoduchá. Aby sme si ju zjednodušili, budeme považovať mag. pole $\vec{B_0}$ za „dostatočne“ slabé, a to tak, aby sa riešenie Einsteinových rovníc (1) nezmenilo, keď pridáme do $T_{\mu\nu}$ (na pravej strane týchto rovníc) zatiaľ neznámu časť, spôsobenú týmto vonkajším poľom. V konečnom dôsledku budeme teda riešiť len Maxwellove rovnice (2), (3) s danou metrikou zodpovedajúcou obecnej vákuovej, stacionárnej, axiálne symetrickej čiernej diere. (Všade ďalej budeme už implicitne uvažovať len túto metriku.)

Killingove vektory a tenzor elmg. poľa $F_{\mu\nu}$.

Killingov vektor ξ^μ je vektorové pole vyhovujúce rovnici

$$\pounds_\xi \, g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \tag{4}$$

kde $\pounds$ označuje Lieovu deriváciu. Predstavme si, že elmg. potenciál A^μ bude daný práve týmto Killingovým vektorom, čiže $A^\mu = \xi^\mu$. Tenzor elmg. poľa potom bude

$$F_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} - \xi_{\mu;\nu} = -2\xi_{\mu;\nu}, \tag{5}$$

kde sme využili (4). Bude takéto $F_{\mu\nu}$ vyhovovať Maxwellovým rovniciam (2) , (3) ?

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -2\xi^{\mu;\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{6}$$

$$F_{[\alpha\beta;\gamma]\text{cykl.}} = -2\xi_{[\alpha;\beta;\gamma]\text{cykl.}} = 0. \tag{7}$$

K dôkazu (6) využijeme definíciu Riemannovho tenzora krivosti

$$\begin{aligned} \xi_{\mu;\nu;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\nu} &= \xi^{\lambda} R_{\lambda\mu\nu\sigma}, \\ \xi_{\nu;\sigma;\mu} - \xi_{\nu;\mu;\sigma} &= \xi^{\lambda} R_{\lambda\nu\sigma\mu}, \\ \xi_{\sigma;\mu;\nu} - \xi_{\sigma;\nu;\mu} &= \xi^{\lambda} R_{\lambda\sigma\mu\nu}, \end{aligned} \tag{8}$$

kde druhé dve rovnice sme dostali z prvej cyklickou zámenou indexov. Sčítaním prvej a tretej rovnice a odčítanim druhej, s využitím (4) dostávame

$$2\xi_{\sigma;\mu;\nu} = \xi^{\lambda}(R_{\lambda[\mu\nu\sigma]\text{cykl.}} - 2R_{\lambda\nu\sigma\mu}). \tag{9}$$

Keďže platí

$$R_{\lambda[\mu\nu\sigma]\text{cykl.}} = 0, \tag{10}$$

je

$$\xi^{\sigma;\mu}{}_{;\mu} = -\xi^{\lambda} R_{\lambda\mu}{}^{\sigma\mu} = -\xi^{\lambda} R_{\lambda}^{\sigma}. \tag{11}$$

Avšak pre vákuové riešenie Einsteinových rovníc je $R_{\mu\nu} = 0$, a tak rovnica (6) platí.
K dôkazu (7) využijeme rovnicu (9) , z ktorej vyplíva

$$\xi_{[\sigma;\mu;\nu]\text{cykl.}} = -\xi^{\lambda} R_{[\nu\sigma\mu]\text{cykl.}} = 0. \tag{12}$$

Poďme sa teraz pozrieť na vlastnosti tenzora elmg. poľa $F_{\mu\nu}$ generovaného časovým Killingovým vektorom $\partial/\partial t$ (označme ho η^{μ}) a axiálnym Killingovým vektorom $\partial/\partial\varphi$ (označme ho ψ^{μ}). Duálne jednaformy sú $\eta = \eta_{\mu} dx^{\mu}$ a $\psi = \psi_{\mu} dx^{\mu}$. Dvojforma elmg. poľa generovaného axiálnym Killingovým vektorom je

$$F_{\psi} = d\psi, \tag{13}$$

kde $F_{\psi} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ a d označuje vonkajší diferenciál. F_{ψ} je stacionárne a axiálne symetrické riešenie, pretože

$$\pounds_{\psi}\, F_{\psi} = \pounds_{\eta}\, F_{\psi} = 0 \tag{14}$$

a v súradnicovej sústave, kde φ a t sú súradnicami (a teda ψ^{μ} a η^{μ} sú dotyčnicové vektory k týmto súradniciam), prejde rovnica (14) na $F_{\mu\nu,\varphi} = F_{\mu\nu,t} = 0$. (14) platí, lebo Lieova derivácia a vonkajší diferenciál komutujú a $\pounds_{\psi}\psi = \pounds_{\eta}\psi = 0$ (posledné dve rovnice platia, pretože v súradnicovej sústave, kde je φ súradnicou, je $\psi_{\mu} = g_{\mu\alpha}\psi^{\alpha} = g_{\mu\varphi}$ a Lieova derivácia metriky podľa Killingovho vektora je nula.) Naviac bude F_{ψ} asymptoticky homogénne magnetické pole, pretože $d\psi$ sa vo veľkých vzdialenostiach od čiernej diery blíži k hodnote, ktorú má v plochom priestore (metrika je tu asymptoticky plochá) .
Magnetický monopól $\mathcal{P}_{\psi}$ poľa F_{ψ} bude nulový, pretože

$$4\pi\mathcal{P}_{\psi} = \int F_{\psi} = \int d\psi = 0, \tag{15}$$

kde integrál je po 2-sfére.
Pre elektrický náboj q_{ψ} však platí

$$4\pi q_{\psi} = \int {}^{*}F_{\psi} = \int {}^{*}d\psi. \tag{16}$$

Pravá strana je však podľa [2]

$$\int {}^{*}d\psi = 16\pi J, \tag{17}$$

kde J je moment hybnosti čiernej diery.
Axiálny Killingov vektor teda generuje stacionárne, axiálne symetrické testovacie elmg. pole, ktoré je asymptoticky homogénne, nemá magnetický monopólový moment a má náboj rovný $4J$.

To isté platí aj pre časový Killingov vektor a ním generované elmg. pole $F_\eta = d\eta$ až na to, že toto pole má náboj rovný $-2M$, kde M je hmotnosť čiernej diery. Pretože podľa [2] je

$$4\pi q_\eta = \int {}^*F_\eta = \int {}^*d\eta = -8\pi M. \tag{18}$$

Platí nasledujúci teorém:

> Nech F je Maxwellove testovacie pole v časopriestore stacionárnej, axiálne symetrickej, vákuovej čiernej diery. Predpokladajme, že F spĺňa nasledujúce podmienky:
>
> 1. F je stacionárne a axiálne symetrické
> 2. F je nesingulárne nad a na horizonte čiernej diery
> 3. F je asymptoticky nulové ďaleko od čiernej diery
> 4. F nemá mag. monopól ani el. náboj
>
> Potom je $F = 0$.

Podľa tohoto teorému existuje najviac jedna perturbácia stacionárnej, axiálne symetrickej, vákuovej čiernej diery. (Keby totiž existovali dve, ich rozdiel by spĺňal podmienky teorému, a tak by sa museli rovnať.) A tak pole $(-Q/2M)F_\eta$ je práve toto (jediné) riešenie. Ľahko sa dá overiť, že v prípade Kerrovej čiernej diery je $(-Q/2M)F_\eta$ presne Kerr-Newmannove elmg. pole.

Čierna diera v homogénnom magnetickom poli.

Zaujíma nás, aké bude elmg. pole F, keď umiestnime stacionárnu, axiálne symetrickú čiernu dieru do pôvodne homogénneho magnetického poľa veľkosti B_0, rovnobežného s osou symetrie čiernej diery. Z fyzikálnych dôvodov je opodstatnené predpokladať, že F spĺňa nasledujúce podmienky :

(I) F je stacionárne a axiálne symetrické,

(II) F je nesingulárne na a nad horizontom čiernej diery,

(III) F sa ďaleko od čiernej diery blíži homogénnemu mg. poľu veľkosti B_0,

(IV) elektrický náboj a magnetický monopólový moment poľa F sú nulové.

Z platnosti teorému citovaného na konci predchádzajúcej časti vyplíva, že podmienky (I)-(IV) určujú elmg. pole F jednoznačne. Z výsledkov predchádzajúcej časti ľahko overíme, že nasledujúce elmg. pole F vyhovuje daným podmienkam:

$$F = \frac{1}{2}B_0(d\psi + \frac{2J}{M}d\eta), \tag{19}$$

kde J a M sú moment hybnosti a hmota čiernej diery, ψ je axiálny Killingov vektor a η je časový Killingov vektor. V prípade Kerrovej čiernej diery,

$$ds^2 = -(1-\frac{2Mr}{\Sigma})dt^2 - \frac{4Marsin^2\theta}{\Sigma}dtd\varphi + \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 sin^2\theta}{\Sigma}sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2, \tag{20}$$

kde

$$\Sigma = r^2 + a^2cos^2\theta, \tag{21}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \tag{22}$$

je tenzor elmg. poľa $F_{\mu\nu}$ v (19) nasledovný :

$$\begin{aligned}
F_{tr} &= -F_{rt} = \frac{B_0 a M}{\Sigma^2}(r^2 - a^2 cos^2\theta)(1 + cos^2\theta), \\
F_{t\theta} &= -F_{\theta t} = \frac{2B_0 a sin\theta cos\theta}{\Sigma^2} M r (r^2 - a^2), \\
F_{r\varphi} &= -F_{\varphi r} = B_0 sin^2\theta \left[r + \frac{M a^2 (r^2 - a^2 cos^2\theta)(1 + cos^2\theta)}{\Sigma^2} \right], \\
F_{\theta\varphi} &= -F_{\varphi\theta} = B_0 sin\theta cos\theta \left[r^2 + a^2 - 2Mra^2 \frac{a^2 + cos^2\theta(2r^2 + a^2 cos^2\theta)}{\Sigma^2} \right].
\end{aligned} \tag{23}$$

Ostatné zložky $F_{\mu\nu}$ sú nulové.
Z posledných vzťahov sa dá ľahko spočítať, že invariant

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{24}$$

nie je blízko čiernej diery zosilnený. Ak však čierna diera rotuje ($a \neq 0$), je invariant

$$\vec{E}.\vec{B} = \frac{1}{4} {}^*F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{25}$$

v blízkosti čiernej diery nenulový, čo znamená, že všetci pozorovatelia tam namerajú nenulové elektrické pole.

Náboj v okolí čiernej diery.

Z výrazu (23) pre F sa dá dokázať, že kladne nabité častice na osi symetrie Kerrovej čiernej diery budú k čiernej diere priťahované viac ako záporné (na osi symetrie elektrické pole E smeruje do čiernej diery). Pokiaľ magnetické pole B_0 bude antiparalelné so špecifickým momentom hybnosti čiernej diery a, tak to bude presne opačne. Vidíme teda, že čierna diera v homogénnom magnetickom poli obklopená plazmou bude selektívne priťahovať nabité častice a tak sa bude nabíjať. Poďme vypočítať náboj na aký sa nabije: Energia častice v stacionárnom priestoročase so stacionárnym elmg. poľom je

$$E = -p_\mu \eta^\mu, \tag{26}$$

kde η^μ je časový Killingov vektor a kanonická 4-hybnosť p_μ je daná ako

$$p_\mu = m u_\mu + e A_\mu, \tag{27}$$

kde m,e je hmotnosť a náboj častice, u_μ jej 4-rýchlosť a A_μ je vektorový potenciál elmg. poľa. Pozrime sa na zmenu elektrostatickej energie ϵ nabitej častice padajúcej do čiernej diery

$$\epsilon = E_{\text{final}} - E_{\text{initial}} = -eA_\mu \eta^\mu \mid_{\text{horizont}} + eA_\mu \eta^\mu \mid_\infty . \tag{28}$$

Ak je ϵ záporné, bude pre čiernu dieru energeticky výhodné pohlcovať viac častíc práve s týmto nábojom e . Ak je ϵ kladné, bude čierna diera pohlcovať viac častíc opačného náboja. V obidvoch prípadoch bude čierna diera selektívne pohlcovať nejaký náboj, až pokým sa A_μ dostatočne nezmení, aby zmena elektrostatickej energie častíc bola nulová.
Riešenie pre čiernu dieru s nábojom Q v homogénnom magnetickom poli je súčtom nenabitého riešenia (23) a poľa $(-Q/2M)F_\eta$ diskutovaného na konci druhej časti. Vektorový potenciál pre toto riešenie je

$$A_\mu = \frac{1}{2} B_0 \left(\psi_\mu + \frac{2J}{M} \eta_\mu \right) - \frac{Q}{2M} \eta_\mu. \tag{29}$$

Keďže platí, že na osi symetrie je $\psi_\mu \eta^\mu = g_{t\varphi} = 0$, v nekonečnu je $\eta_\mu \eta^\mu = g_{tt} \to -1$ a na horizonte na osi symetrie je $\eta_\mu \eta^\mu = g_{tt} = 0$, tak zmena energie ϵ v potenciále (29) bude (viď (28))

$$\epsilon = e\left(\frac{Q}{2M} - \frac{B_0 J}{M}\right). \tag{30}$$

(30) sme odvodili len pre častice pohybujúce sa pozdĺž osi symetrie, ale podľa [3] je zmena elektrostatickej energie ϵ konštanta, nezávislá na tom, odkiaľ z nekonečna časticu púšťame, a kde na horizonte skončí. A tak rovnica (30) platí obecne, nielen na osi symetrie.
Čierna diera v homogénnom magnetickom poli sa teda bude nabíjať až kým nebude zmena elektrostatickej energie častíc ϵ nulová, čo znamená, že sa nabije na náboj

$$Q = 2B_0 J. \tag{31}$$

Všimnime si ešte, že (31) platí pre ľubovoľnú stacionárnu, axiálne symetrickú čiernu dieru, t.j. v celom odvodení sme nepredpokladali, že čierna diera je Kerrova.

Literatúra

[1] R. M. Wald, Phys. Rev. D 10, 1680 (1974)
[2] J. M. Cohen, R. M. Wald, J. Math. Phys. 13, 543 (1972)
[3] B. Carter : Black Holes (edited by C. DeWitt and B. DeWitt, Gordon and Breach, New York, 1973)