Statický bílý trpaslík

1. Základní vztahy z mechaniky tekutin

Nejjednodušší je zapomenout na teorii relativity a omezit se na klasickou newtonovskou mechaniku; protože ve statickém bílém trpaslíkovi nelze očekávat makroskopické rychlosti srovnatelné s rychlostí světla, projeví se relativistické efekty pouze při velkých hmotnostech, a to v chování gravitačního pole. Vyjdeme tedy z klasického Newtonova druhého zákona pohybu:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \tag{1.1}$$

Rychlost tělesa $\vec{v}$ ovšem musíme pro tekutinu nahradit rychlostí $\vec{u}(\vec{r})$ tekutiny bodě $\vec{r}$, hmotnost m vztáhnout na objem, to jest nahradit hustotou tekutiny ϱ v daném bodě, a se silou $\vec{F}$ si počínat obdobně — hustotu síly označíme $\vec{f}$. Pouze čas t zůstává (aspoň v rámci klasické fyziky) nedotknutelný. Druhý Newtonův zákon pak má pro tekutinu tvar:

$$\varrho(\vec{r})\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) \tag{1.2}$$

Závislost na $\vec{r}$ nebudeme nadále výslovně vypisovat. V rovnici (1.2) nám její uvedení umožnilo zdůraznit, že $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}(\vec{r})$ nevyjadřuje změnu rychlosti tekutiny v daném bodě $\frac{\partial\vec{u}(\vec{r})}{\partial t}$, nýbrž, zcela analogicky (1.1), změnu rychlosti (nekonecně) malého objemu tekutiny, který se právě nachází v bodě $\vec{r}$. Sledujeme-li tento objem po jeho dráze, snadno si uvědomíme, že $\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$ hraje skutečně roli parciální derivace a platí:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\nabla\vec{u} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} \tag{1.3}$$

Hustota síly $\vec{f}$ na pravé straně (1.2) pochází jednak od vnějších sil, jednak od sil vnitřních. Když zanedbáme viskozitu tekutiny, zůstává jediným projevem vnitřních sil tlak P, jehož příspěvek $\vec{f}_P$ k hustotě síly $\vec{f}$ působící na (nekonečně) malý objem V dostaneme integrací přes jeho hraniční plochu ∂V (vektorový diferenciál plochy $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ má směr vnější normály):

$$\vec{f}_P = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_{\partial V} -P\overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{1.4a}$$

Integrál upravíme podle Gaussovy věty a limitu provedeme buď intuitivně nebo podle věty o střední hodnotě:

$$\vec{f}_P = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_V -\nabla P\mathrm{d}V = -\nabla P \tag{1.4b}$$

Z vnějších sil (to jest sil, které by v daném bodě působily na testovací částici nezávisle ne přítomnosti tekutiny v jeho nejbližším okolí) budeme uvažovat pouze sílu gravitační, popsanou gravitačním zrychlením $\vec{g}$. Celkově tedy:

$$\vec{f} = \varrho\vec{g} - \nabla P \tag{1.4c}$$

Dosadíme (1.3) a (1.4c) do (1.2) a výslednou rovnici vydělíme ϱ:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\varrho}\nabla P} \tag{1.5}$$

Tím jsme dostali Eulerovu rovnici, tak známou, že by ji bývalo možná bylo rozumnější napsat rovnou. Pro některé účely se hodí přepsat ji pomocí vektorové identity

$$\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) = \frac{1}{2}\nabla u^2 - \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} \tag{1.6}$$

do tvaru:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) + \frac{1}{2}\nabla u^2 = \vec{g} - \frac{1}{\varrho}\nabla P \tag{1.7}$$

O tekutině se často předpokládá, že je barotropní, to jest, že její tlak P je jednoznačně určen hustotou ϱ :

$$P \equiv P(\varrho) \tag{1.8}$$

Tento předpoklad je splněn, pokud některá z termodynamických veličin, například teplota nebo enthropie (měrná samozřejmě, neboť potřebujeme pracovat s veličinami definovanými lokálně), zůstává konstantní a nemění se složení tekutiny (chemickými ani jadernými reakcemi ani difuzí složek směsi). (1.8) tedy platí téměř ve všech případech idealizovaných a téměř v žádném reálném. Zato další předpoklad, totiž že existuje potenciál ϕ gravitačního pole:

$$\vec{g} = -\nabla\phi \tag{1.9}$$

neznamená žádné fyzikální omezení.

Upravíme-li (1.7) při platnosti (1.8) a (1.9), dostaneme

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) + \frac{1}{2}\nabla u^2 = -\nabla\phi - \frac{1}{\varrho}\nabla P(\varrho)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) + \nabla(\frac{1}{2}u^2) = -\nabla\phi - \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\varrho}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \vec{u}\times(\nabla\times\vec{u}) = -\nabla(\frac{1}{2}u^2 + \phi + h) \tag{1.10}$$

kde

$$h =_{\text{def.}} \int \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\varrho}\mathrm{d}\varrho = \int \frac{\mathrm{d}P}{\varrho} \tag{1.11}$$

můžeme (vzhledem k postavení vedle $\frac{1}{2}u^2$ a ϕ) interpretovat jako vnitřní energii tekutiny na jednotku hmotnosti.

Rotace rovnice (1.10) dá

$$\nabla\times\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nabla\times(\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})) = -\nabla(\frac{1}{2}u^2 + \phi + h)$$
$$= 0 \tag{1.12}$$

Zavedeme-li vířivost tekutiny $\vec{\omega}$ vztahem

$$\vec{\omega} =_{\text{def.}} \nabla\times\vec{u} \tag{1.13}$$

přejde (1.12) na:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u}) = 0 \tag{1.14}$$

Jiné zajímavé podoby nabývá (1.10) v případě stacionárního proudění, kdy $\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} = 0$. Když pak (1.10) skalárně vynásobíme $\vec{u}$, anulujeme i člen $\vec{u}\times(\nabla\times\vec{u})$ a dostaneme:

$$\vec{u}\cdot\nabla(\frac{1}{2}u^2 + \phi + h) \equiv \vec{u}\cdot\nabla\mathcal{B} = 0 \tag{1.15}$$

Veličina

$$\mathcal{B} =_{\text{def.}} \frac{1}{2}u^2 + \phi + h \tag{1.16}$$

má význam celkové energie proudící tekutiny na jednotku hmoty a rovnice (1.14), zvaná Bernoulliova, říká, že podél proudnice se $\mathcal{B}$ zachovává. Jde tedy o jednu z podob zákona zachování energie.

Nejjednodušší zvláštní tvar má Eulerova rovnice (1.6) pro tekutinu statickou, to jest, když $\vec{u} \equiv 0$. Pak přechází na rovnici hydrostatické rovnováhy (pro neviskózní tekutinu):

$$\vec{g} \equiv -\nabla\phi = \frac{1}{\varrho}\nabla P \tag{1.17}$$

Rovnice (1.17) je ve skutečnosti jedinou rovnicí z mechaniky tekutin, kterou budeme v příštích výpočtech potřebovat. Stojí za povšimnutí, že ve statické tekutině se nemůžeme setkat s efekty relativistické kinematiky.

2. Degenerovaný Fermiho plyn

Degenerovaný Fermiho plyn je limitním případem Fermiho–Diracovy statistiky pro neinteragující soustavu částic při teplotě $T = 0\mathrm{K}$; pro jeho pochopení však nemusíme o Fermiho–Diracově rozdělení vědět téměř nic. Úplně vystačíme se znalostí Pauliho vylučovacího principu, podle nějž žádné dva fermiony nemohou být v tomtéž stavu (na stejné energetické hladině a se stejným spinem). V degenerovaném Fermiho plynu jsou všechny stavy s energií menší nebo rovnou Fermiho energii E_F obsazeny, všechny stavy s vyšší energií jsou prázdné. Pouhé povědomí o tom, že Fermiho-Diracovo rozdělení je funkcí bezrozměrného parametru rovného podílu energie a $k_\mathrm{B}T$, kde k_B je Boltzmannova konstanta, nám pak stačí k posouzení, kdy můžeme o soustavě fermionů uvažovat jako o degenerovaném Fermiho plynu — potřebujeme, aby $T \approx 0$, což znamená, že $k_\mathrm{B}T \ll E_\mathrm{F}$. (Další podmínkou samozřejmě bude zanedbatelnost interakce mezi částicemi: typická potenciální energie této interakce musí být mnohem menší než kinetická energie částic, což znamená, že v případných kvantitativních úvahách bychom ji rovněž srovnávali s E_F — příspěvek potenciální energie k E_F musí být zanedbatelný.)

U částic degenerovaného Fermiho plynu musíme počítat i s relativistickými rychlostmi. Člověka uvyklého klasické termodynamice může zarazit, že částice se pohybují vysokými rychlostmi při zanedbatelné teplotě (a vůbec že teplota je zanedbatelná ve srovnání s kinetickou energií částic), ale snadno nahlédneme, že to je důsledek Pauliho principu — některé fermiony se musí pohybovat vysokými rychlostmi i při $T = 0\mathrm{K}$, protože stavy s rychlostmi nižšími jsou obsazeny. Mezi (kinetickou) energií E, klidovou hmotností m, rychlostí $\vec{v}$ a hybností $\vec{p}$, jimiž budeme jednotlivé částice popisovat, tedy budeme předpokládat vztahy podle speciální teorie relativity (rychlost světla označíme c, jak bývá zvykem):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.1}$$

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \frac{m^2c^4}{(1-\frac{v^2}{c^2})} - \frac{m^2v^2c^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})} \\ &= m^2c^4 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Zajímá nás vztah mezi tlakem P a hustotou ϱ degenerovaného Fermiho plynu. Z důvodů, jež se vyjasní později, nalezneme místo něj vztah mezi P a číselnou hustotou částic n. Nejprve vypočteme n. Vyjdeme při tom z interpretace Heissenbergova principu neurčitosti, podle níž každý energetický stav zaujímá ve fázovém prostoru fázový objem rovný Planckově konstantě h^3. Nachází-li se degenerovaný Fermiho plyn v objemu V a má-li Fermiho energii E_F, s níž je vztahem (2.3) jednoznačně spojen Fermiho impuls p_F, vyplňuje fázový objem

$$\begin{aligned} V_\varphi &= V \cdot \int\limits_0^{p_\mathrm{F}} \mathrm{d}p \int\limits_0^{\pi} p\mathrm{d}\vartheta \int\limits_0^{2\pi} p\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi = V \cdot \int\limits_0^{p_\mathrm{F}} 4\pi p^2\mathrm{d}p \\ &= V \cdot \frac{4\pi}{3}{p_\mathrm{F}}^3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pro fermiony se spinem s (který, jak známo, musí být polocelý) představuje jeden energetický stav o fázovém objemu h^3 celkem $(2s+1)$ stavů, takže počet N částic v objemu V je:

$$N = V \cdot \frac{(2s+1)}{h^3}\frac{4\pi}{3}{p_\mathrm{F}}^3 \tag{2.5}$$

Číselnou hustotu částic n dostaneme z (2.4) prostým vydělením objemem V:

$$n = \frac{(2s+1)}{h^3}\frac{4\pi}{3}{p_\mathrm{F}}^3 \tag{2.6}$$

S ohledem na měřitelnost veličin bychom se na tento vztah měli dívat spíše jako na vyjádření Fermiho hybnosti pomocí číselné hustoty částic, ale v dalších úpravách se nám bude hodit právě v podobě (2.6).

Abychom určili tlak P odpovídající Fermiho hybnosti p_{F}, uvažujme (nekonečně malou) plošku S a spočtěme sílu F, kterou na ni degenerovaný Fermiho plyn působí. Z částic letících k plošce S rychlostí $\vec{v}$, jež svírá úhel ϑ s normálou plošky, dopadnou na tuto plošku za (nekonečně malý) čas $\mathrm{d}t$ všechny, které se nacházejí v objemu

$$V = S(v\cos\vartheta)\mathrm{d}t \tag{2.7}$$

kde $v \equiv |\vec{v}|$ je velikost rychlosti $\vec{v}$. Každá taková částice se od plošky odrazí — průmět její rychlosti do normály plošky se obrátí (předpokládáme, že srážka je dokonale pružná). To znamená, že odražená částice předala plošce hybnost

$$\Delta p = 2p\cos\vartheta \tag{2.8}$$

kde p je velikost hybnosti částice. Vztah mezi $\vec{v}$ a $\vec{p}$ určuje rovnice (2.2) — oba vektory jsou rovnoběžné a mezi v a p platí:

$$\begin{gathered} p^2 - p^2\frac{v^2}{c^2} = m^2v^2 \\ \Downarrow \\ \frac{v}{c} = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} \end{gathered} \tag{2.9}$$

Sílu F dostaneme jako podíl celkové hybnosti, jíž ploška přijme za čas $\mathrm{d}t$, a času $\mathrm{d}t$; podobně jako při výpočtu n budeme integrovat přes fázový prostor (objem V tentokrát závisí na hybnosti) a použijeme toho, že ve fázovém objemu h^3 leží $(2s+1)$ stavů:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\mathrm{d}t}\frac{(2s+1)}{h^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p\int_0^{\pi/2}p\mathrm{d}\vartheta\int_0^{2\pi}p\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi V\Delta p \\ &= \frac{1}{\mathrm{d}t}\frac{(2s+1)}{h^3}\int_0^{p_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p\int_0^{\pi/2}p\mathrm{d}\vartheta 2\pi p\sin\vartheta S(v\cos\vartheta)\mathrm{d}t 2p\cos\vartheta \\ &= \frac{(2s+1)}{h^3}4\pi\int_0^{p_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p p^3\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta\sin\vartheta S\left(c\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta \\ &= \frac{(2s+1)}{h^3}4\pi Sc\int_0^{p_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p\frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta\sin\vartheta(\cos\vartheta)^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Přes ϑ integrujeme pouze do $\frac{\pi}{2}$, protože nás zajímají pouze částice dopadající na jednu stranu plošky. Z (2.10) dostaneme tlak P pouhým vydělením síly F ploškou S (připomeňme si, že S uvažujeme nekonečně malou, abychom měli tlak P definovaný lokálně):

$$P = \frac{(2s+1)}{h^3}4\pi c\int_0^{p_{\mathrm{F}}}\mathrm{d}p\frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\vartheta\sin\vartheta\cos^2\vartheta \tag{2.11}$$

Ve vzorci (2.11) potřebujeme spočítat integrály. Přes úhel ϑ přeintegrujeme snadno:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta = \int_1^0\cos^2\vartheta(-\mathrm{d}\cos\vartheta) = \frac{1}{3} \tag{2.12}$$

V integrálu přes p provedeme substituci

$$\begin{aligned} \sinh\theta &= \frac{p}{mc} \\ \cosh\theta\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{mc}\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{2.13}$$

Potom
$$p^2c^2 + m^2c^4 = m^2c^4\left(\left(\frac{p}{mc}\right)^2 + 1\right) = m^2c^4(\sinh^2\theta + 1) = m^2c^4\cosh^2\theta \tag{2.14}$$
a integrujeme od 0 do θ_{F}, kde
$$\sinh\theta_{\mathrm{F}} = \frac{p_{\mathrm{F}}}{mc} \tag{2.15}$$
Dostaneme:
$$\begin{aligned}\int_0^{p_{\mathrm{F}}} \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\mathrm{d}p &= \int_0^{\theta_{\mathrm{F}}} \frac{m^4c^4\sinh^4\theta}{\sqrt{m^2c^2\cosh^2\theta}} mc\cosh\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\theta_{\mathrm{F}}} m^4c^4\sinh^4\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}\tag{2.16}$$

S využitím identit
$$\begin{aligned}\sinh^2\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^\theta - rme^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\theta} - 2 + \mathrm{e}^{-2\theta}}{4} = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1) \\ \cosh^2\theta &= \left(\frac{\mathrm{e}^\theta + rme^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\theta} + 2 + \mathrm{e}^{-2\theta}}{4} = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta + 1)\end{aligned}\tag{2.17}$$
pak upravíme:
$$\begin{aligned}\sinh^4\theta &= \left(\frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1)\right)^2 = \frac{1}{4}(cosh^2 2\theta - 2cosh2\theta + 1) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\cosh 4\theta + 1) - 2\cosh 2\theta + 1\right) = \frac{1}{8}\cosh 4\theta - \frac{1}{2}\cosh 2\theta + \frac{3}{8}\end{aligned}\tag{2.18}$$
a zintegrujeme:
$$\int_0^{\theta_{\mathrm{F}}} \sinh^4\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\theta_{\mathrm{F}}}\left(\frac{1}{8}\cosh 4\theta - \frac{1}{2}\cosh 2\theta + \frac{3}{8}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{32}\sinh 4\theta_{\mathrm{F}} - \frac{1}{4}\sinh 2\theta_{\mathrm{F}} + \frac{3}{8}\theta_{\mathrm{F}} \tag{2.19}$$
Tento výsledek upravíme pomocí (2.17) a další identity:
$$\sinh 2\theta = \frac{\mathrm{e}^{2\theta} - \mathrm{e}^{-2\theta}}{2} = \frac{(\mathrm{e}^\theta - \mathrm{e}^{-\theta})(\mathrm{e}^\theta + \mathrm{e}^{-\theta})}{2} = 2\sinh\theta\cosh\theta = 2\sinh\theta\sqrt{\sinh^2\theta + 1} \tag{2.20}$$
na
$$\begin{aligned}\int_0^{\theta_{\mathrm{F}}} \sinh^4\theta\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{16}\sinh 2\theta_{\mathrm{F}}\cosh 2\theta_{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}\sinh\theta_{\mathrm{F}}\cosh\theta_{\mathrm{F}} + \frac{3}{8}\theta_{\mathrm{F}} \\ &= \frac{1}{8}\sinh\theta_{\mathrm{F}}\cosh\theta_{\mathrm{F}}(2\sinh^2\theta_{\mathrm{F}} + 1) - \frac{1}{2}\sinh\theta_{\mathrm{F}}\cosh\theta_{\mathrm{F}} + \frac{3}{8}\theta_{\mathrm{F}} \\ &= \frac{1}{4}\sinh^3\theta_{\mathrm{F}}\cosh\theta_{\mathrm{F}} - \frac{3}{8}\sinh\theta_{\mathrm{F}}\cosh\theta_{\mathrm{F}} + \frac{3}{8}\theta_{\mathrm{F}} \\ &= \frac{1}{4}\left(\sinh\theta_{\mathrm{F}}\left(\sinh^2\theta_{\mathrm{F}} - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\sinh^2\theta_{\mathrm{F}} + 1} + \frac{3}{2}\theta_{\mathrm{F}}\right)\end{aligned}\tag{2.21}$$
(2.21) dosadíme do (2.16) a vezmeme v úvahu (2.15):
$$\int_0^{p_{\mathrm{F}}} \frac{p^4}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}\mathrm{d}p = \frac{m^4c^4}{4}\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{mc}\left(\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{mc}\right)^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{mc}\right)^2 + 1} + \frac{3}{2}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{mc}\right)\right) \tag{2.22}$$

Výsledky (2.22) a (2.12) dosadíme do (2.11):

$$P = \frac{(2s+1)}{h^3}\frac{\pi c}{3} m^4 c^4 \left(\frac{p_\mathrm{F}}{mc} \left(\left(\frac{p_\mathrm{F}}{mc}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{p_\mathrm{F}}{mc}\right)^2 + 1} + \frac{3}{2} \operatorname{arg\,sinh} \left(\frac{p_\mathrm{F}}{mc}\right)\right) \tag{2.23}$$

Zavedeme-li bezrozměrný parametr x:

$$x =_{\text{def.}} \frac{p_\mathrm{F}}{mc} \tag{2.24}$$

dostaneme z rovnic (2.6) a (2.23) parametrické vyjádření číselné hustoty částic a tlaku pro degenerovaný Fermiho plyn:

$$\begin{aligned} n &= (2s+1)\frac{4\pi}{3}\left(\frac{mc}{h}\right)^3 x^3 \\ P &= (2s+1)\frac{\pi}{6}\left(\frac{mc}{h}\right)^3 mc^2 f(x) \end{aligned} \tag{2.25}$$

kde

$$f(x) \equiv x(2x^2-3)\sqrt{x^2+1} + 3 \operatorname{arg\,sinh} x \tag{2.26}$$

Mohlo by se zdát, že vztah mezi P a n nemá mnoho společného se vztahem mezi P a ϱ, neboť hustotu ϱ bychom měli počítat jako integrál celkové (to jest v našem případě klidové plus kinetické) energie částic. Nás však zajímá bílý trpaslík, v němž sice rozhodující příspěvek k tlaku pochází od lehkých, rychle se pohybujících elektronů, ale na hustotu mají největší vliv těžké, pomalé nukleony; protože počet nukleonů je úměrný počtu elektronů (konstanta úměrnosti závisí na chemickém a izotopickém složení látky), bude ϱ úměrná n.

Z rovnic (2.25), (2.26) snadno zjistíme, jak se degenerovaný Fermiho plyn chová v ultrarelativistické limitě ($x \gg 1$):

$$f(x \gg 1) \approx 2x^4 \Rightarrow P \sim \varrho^{4/3} \tag{2.27}$$

Klasická limita ($x \to 0$) se spočte poněkud obtížněji, neboť rozvoj f(x) do Taylorovy řady není nejsnazší; ukazuje se, že první nenulový člen je až pátého stupně. Užijeme-li tedy přibližných vzorců pátého řádu

$$\begin{aligned} \operatorname{arg\,sinh} x &\approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 \\ \sqrt{1+x^2} &\approx 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 \end{aligned} \tag{2.28}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} f(x \ll 1) &\approx x\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right)(2x^2-3) + 3x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{40}x^5 \\ &\approx \frac{8}{5}x^5 \Rightarrow P \sim \varrho^{5/3} \end{aligned} \tag{2.29}$$

3. Bílý trpaslík

Abychom mohli dosadit (2.25) do (1.17), potřebujeme ještě vyjádřit hustotu ϱ pomocí číselné hustoty částic degenerovaného Fermiho plynu n. V případě bílého trpaslíka je degenerovaný Fermiho plyn tvořen elektrony, jejichž číselná hustota ϱ_e musí být rovna (kvůli elektroneutralitě) číselné hustotě protonů. Jsou-li tedy ve hmotě bílého trpaslíka zastoupeny prvky s protonovým číslem Z a nukleonovým číslem A_Z v molárních zlomcích X_Z, bude:

$$n_\mathrm{e} = \frac{\varrho}{m_\mathrm{H}}\sum_Z \frac{X_Z Z}{A_Z} = \frac{\varrho}{m_\mathrm{H}}\sum_Z X_Z \frac{1}{\mu_\mathrm{e}(Z)} = \frac{\varrho}{\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}} \tag{3.1}$$

kde m_H je hmotnost protonu (čili jádra H), $\mu_\mathrm{e}(Z) \equiv \frac{A_Z}{Z}$ hmotnostní faktor jádra Z a μ_e je efektivní hmotnostní faktor dané směsi. Pro vodík je $\mu_\mathrm{e} = 1$, pro prvky od helia po kyslík má hodnotu 2 a pro těžší prvky roste; protože vodík bude v bílém trpaslíkovi pravděpodobně spálen a pro železo, jež je nejtěžším prvkem, jaký můžeme v bílém trpaslíkovi očekávat ve významnějším množství, je $\mu_\mathrm{e} \doteq 2{,}15$, budeme nadále předpokládat $\mu_\mathrm{e} = 2$.

Spojením (3.1) s (2.25) dostaneme:

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho_0 x^3 \\ P &= P_0 f(x) \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= (2s+1)\frac{4\pi}{3}\left(\frac{m_\mathrm{e} c}{h}\right)^3 \mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H} \\ P_0 &= (2s+1)\frac{\pi}{6}\left(\frac{m_\mathrm{e} c}{h}\right)^3 m_\mathrm{e} c^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

V těchto vztazích m_e znamená klidovou hmotnost elektronu; jeho spin $s = \frac{1}{2}$.

Rovnice (1.17) a (3.2) ještě netvoří úplnou soustavu, neboť schází vztah pro gravitační potenciál ϕ. Použijeme klasický Newtonův gravitační zákon (pro sféricky symetrický případ):

$$\phi = -G\frac{M}{r} \tag{3.4}$$

kde G je gravitační konstanta, M hmotnost uzavřená v kouli o poloměru r a r vzdálenost daného bodu od středu symetrie. Rovnice (1.17) pak přejde na:

$$-\frac{GM}{r^2} = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} \tag{3.5}$$

Soustavu rovnic uzavřeme rovnicí pro hmotnost M:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \varrho \tag{3.6}$$

S ohledem na (3.2) dostaneme z (3.5) a (3.6) (pomocí oblíbeného krácení diferenciálů):

$$\begin{aligned} P_0\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}M} &= -\frac{GM}{4\pi r^4} \\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}M} &= \frac{1}{4\pi r^2 \varrho_0 x^3} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Zapíšeme M a r pomocí bezrozměrných parametrů $\mathcal{M}$, ξ:

$$M = M_0\mathcal{M} \qquad r = r_0\xi \tag{3.8}$$

přičemž konstanty M_0, r_0 se pokusíme zvolit tak, aby rovnice (3.7) dostaly co nejjednodušší tvar.

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{M_0}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= -\frac{GM_0\mathcal{M}}{4\pi {r_0}^4\xi^4} \\ \frac{r_0}{M_0}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= \frac{1}{4\pi {r_0}^2\varrho_0 x^3\xi^2} \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= -\frac{1}{4\pi}\frac{G{M_0}^2}{P_0{r_0}^4}\frac{\mathcal{M}}{\xi^4} \\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= \frac{1}{4\pi}\frac{M_0}{\varrho_0{r_0}^3}\frac{1}{x^3\xi^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Budeme požadovat

$$\frac{G{M_0}^2}{P_0{r_0}^4} = 1 \quad\wedge\quad \frac{M_0}{\varrho_0{r_0}^3} = 1 \tag{3.10}$$

a dostaneme:

$$\begin{aligned} r_0 = \frac{1}{\varrho_0}\sqrt{\frac{P_0}{G}} &= \frac{1}{4\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H}}(2s+1)^{-3/2}\left(\frac{h}{m_\mathrm{e} c}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{6m_\mathrm{e}c^2}{\pi G}} \\ M_0 = \varrho_0{r_0}^3 \quad &= \frac{1}{(8\mu_\mathrm{e} m_\mathrm{H})^2}(2s+1)^{-5/2}\left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2}\sqrt{\frac{6}{\pi}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nyní máme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= -\frac{\mathcal{M}}{4\pi\xi^4} \\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= \frac{1}{4\pi\xi^2 x^3} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ještě vypočteme derivaci $f(x)$ z (2.26):

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = (2x^2-3)\sqrt{x^2+1} + x(4x)\sqrt{x^2+1} + x(2x^2-3)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{8x^4}{\sqrt{x^2+1}} \tag{3.13}$$

a dosadíme ji do (3.12):

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= -\frac{\mathcal{M}\sqrt{x^2+1}}{32\pi\xi^4x^4}\\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\mathcal{M}} &= \frac{1}{4\pi\xi^2x^3}\end{aligned}} \tag{3.14}$$

Rovnice (3.14) jsou, bohužel, v okolí středu hvězdy ($\xi \to 0, \mathcal{M} \to 0$) singulární; pravá strana druhé z nich diverguje dokonce jako $\left(\frac{1}{\xi}\right)^2$. Divergenci na pravé straně první rovnice můžeme posoudit, když si uvědomíme, že ze druhé rovnice vyplývá pro malá ξ podle l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\mathcal{M}}{\xi^3} = \frac{1}{3\xi^2\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\mathcal{M}}} = \frac{4}{3}\pi x^3 \tag{3.15}$$

(Protože x^3 zde hraje roli hustoty — viz (3.2) —, neříká (3.15) vlastně nic jiného, než že nekonečně malá koule je homogenní.) Ze vztahu (3.15) snadno zjistíme, že pravá strana první rovnice z (3.14) diverguje jako $\frac{1}{\xi}$, tedy méně než pravá strana rovnice druhé.

Částečně si můžeme pomoci tím, že místo $\mathcal{M}$ použijeme jako integrační proměnnou x. Kdo se nebojí dělit diferenciály, snadno nahlédne, že rovnice (3.14) jsou ekvivalentní rovnicím

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}x} &= -\frac{32\pi\xi^4x^4}{\mathcal{M}\sqrt{x^2+1}}\\ \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} &= -\frac{8\xi^2x}{\mathcal{M}\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}} \tag{3.16}$$

V rovnicích (3.16) diverguje pro $\xi \to 0$ už pouze pravá strana druhé rovnice, a to jako $\frac{1}{\xi}$, což se dá při dostatečné kapacitě výpočetní techniky poměrně rozumně zvládnout.

Rovnice (3.16) se numericky integrují od zvolené hodnoty x do nuly, kterážto hodnota definitoricky odpovídá povrchu hvězdy (nulová hustota, nulový tlak). Kvůli singulárnímu chování druhé rovnice kolem středu hvězdy se nezačíná integrovat přímo z počátku, ale od vhodně malé počáteční hodnoty ξ, k níž se dopočte příslušná hodnota $\mathcal{M}$ podle (3.15). Tak lze studovat závislost hmotnosti hvězdy na hustotě v jejím středu nebo vztah mezi hmotností a poloměrem hvězdy.

Následující grafy byly pořízeny takovouto integrací v systému Famulus. Jako jednotka hmotnosti byla použita hmotnost Slunce, jako jednotka délky jeho poloměr a jako jednotka hustoty (ne zcela konzistentně, leč názorně) hustota vody. Oba dva grafy mají logaritmickou škálu, aby pokryly co největší oblast hodnot.

První graf zachycuje závislost hmotnosti na hustotě. Vidíme, že při $\log(M/M_\odot) \approx 0.2$ se křivka stáčí tak, že větší hustotě hvězdy by měla odpovídat menší hmotnost. Tomu by mělo odpovídat, že bílý trpaslík, který (například akrecí) dosáhne kritické hmotnosti, nemůže přejít malou změnou vnitřního uspořádání do stabilního stavu a začne kolabovat. Při troše dobré vůle si to lze vykládat jako Chandrasekharovu mez — podle grafu by sice měl kolabující bílý trpaslík nakonec přece jen dosáhnou rovnovážného stavu, ale není jisto, zda takový stav ještě leží v oblasti, kde popis hmoty hvězdy jako degenerovaného elektronového plynu odpovídá skutečnosti.

Druhý graf zobrazuje vztah mezi poloměrem bílého trpaslíka a jeho hmotností. Chandrasekharova mez se tu projevuje podobně jako v předchozím grafu, máme možnost přesvědčit se, že při kolapsu hvězdy se bude její poloměr (přesně podle očekávání) zmenšovat. Stojí za povšimnutí, že křivka závislosti $\log(M/M_\odot)$ na $\log(R/R_\odot)$ prochází dosti daleko od bodu $[0,0]$; souvisí to, pochopitelně, se skutečností, že naše Slunce není bílým trpaslíkem.