

Fyzika v astrofyzice

Poznámky k přednášce

Tento text obsahuje studijní materiály k úvodní části přednášky z astrofyziky (F 788) konané na Astronomickém ústavu Univerzity Karlovy v Praze. Soubor s textem je dostupný na *World-Wide-Webu*.

VLADIMÍR KARAS, 1997

1.1 Mechanika

V této kapitole se hovoří o Keplerových zákonech, jejich vztahu k Newtonovu gravitačnímu zákonu, a o dráhových elementech používaných k popisu pohybu kosmických těles.

Johannes Kepler (1571–1630) odvodil na základě pozorování polohy planety Mars (Tycho Brahe) tři věty popisující pohyb tělesa (planety) v centrálním gravitačním poli (Slunce):^[1]

1. Průvodič vedený od Slunce k planetě opisuje ve stejných dobách stejné plochy.
2. Planety obíhají kolem Slunce v elipsách, v jejichž společném ohnisku se nachází Slunce.
3. Čtverce dob oběžných dvou planet mají se k sobě tak jako třetí mocniny velkých poloos jejich drah.

Tyto věty byly poprvé otištěny v Keplerově knize *Astronomia Nova* (r. 1609) a *Harmonices Mundi* (r. 1619). Ukážeme si, jak lze z uvedených tří vět dospět k Newtonovu gravitačnímu zákonu.

Z důvodu symetrie uvažovaného problému je pohyb rovinný (to je ostatně řečeno v druhé větě).

Matematické vyjádření prvního zákona (zachování momentu hybnosti):

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}, \quad \mathbf{w} \equiv \frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad (1.1)$$

Tudíž zrychlení (a tedy i odpovídající síla) leží na spojnici obou těles, tzn. jsou centrální:

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0 \quad (1.2)$$

Platí:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| &= |\mathbf{r} \times (\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\phi)| = |r\mathbf{r}_o \times \mathbf{v}_r + r\mathbf{r}_o \times \mathbf{v}_\phi| \\ &= |r\mathbf{r}_o \times \dot{r}\mathbf{r}_o + r\mathbf{r}_o \times r\dot{\phi}\phi_o| = |r^2\dot{\phi}\mathbf{w}_o| = \text{const} \equiv \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

kde

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\phi = \dot{r}\mathbf{r}_o + r\dot{\phi}\phi_o = \dot{r}\mathbf{r}_o + r\dot{\phi}\phi_o; \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\phi = \dot{r}\dot{\mathbf{r}}_o + \dot{r}\dot{\phi}\phi_o + r\frac{d}{dt}\dot{\phi}\phi_o. \quad (1.5)$$

^[1]Hmotnost planety m je mnohem menší než hmotnost Slunce M_\odot , takže ji lze považovat za testovací částici pohybující se v předem pevně zadaném poli centrálního tělesa. Pohyb dvou těles o srovnatelné hmotnosti (např. složky dvojhvězdy) lze popsat rovnicemi stejného tvaru, přejdeme-li k těžištové soustavě a redukovaným hmotnostem.

Odtud

$$\mathbf{a}_r = \frac{d^2 r}{dt^2} \mathbf{r}_o - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \mathbf{r}_o = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{\mathcal{B}^2}{r^3} \right) \mathbf{r}_o. \quad (1.6)$$

Nyní k tvaru dráhy. Rovnici elipsy lze zapsat v obvyklém značení^[2] ve tvaru

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \phi}, \quad \epsilon \equiv \frac{e}{a}, \quad p \equiv \frac{b^2}{a}, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{p\epsilon\dot{\phi}}{(1 - \epsilon \cos \phi)^2} \\ &= -\frac{\epsilon}{p} r^2 \dot{\phi} \sin \phi, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{\epsilon}{p} \left[\underbrace{\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi})}_{=0} \sin \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos \phi \right] \\ &= -\frac{\epsilon \mathcal{B}^2}{p r^2} \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dosadíme z rov. (1.9) do (1.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_r &= -\frac{\mathcal{B}^2}{r^2} \left(\frac{\epsilon}{p} \cos \phi + \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}_o \\ &= -\frac{\mathcal{B}^2}{r^2} \left[\frac{\epsilon}{p} \cos \phi + \frac{1}{p} (1 - \epsilon \cos \phi) \right] = -\frac{\mathcal{B}^2}{pr^2} \mathbf{r}_o, \end{aligned} \quad (1.10)$$

tzn.

$$\mathbf{a}_r = -\frac{\text{const}}{r^2} \mathbf{r}_o \equiv -\frac{\mathcal{C}}{r^2} \mathbf{r}_o. \quad (1.11)$$

Mezi plochou eliptické dráhy S a odpovídající oběžnou dobu T platí vztah (viz rov. [1.1]–[1.3])

$$S = \pi ab = \frac{1}{2} \mathcal{B} T = \pi \sqrt{a^3 p}, \quad (1.12)$$

kde $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2) = ap$. (Hlavní poloosu a elipsy nezaměňovat s velikostí vektoru zrychlení $|\mathbf{a}|$.) Podle třetího Keplerova zákona tedy

$$\text{const} = \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{\mathcal{B}^2}. \quad (1.13)$$

^[2]Excentricita ϵ a velká poloosa a dráhy souvisí se vzdáleností pericentra (t.j. perihélia v případě planet v naší sluneční soustavě) r_{per} a apocentra (afélia) r_{af} takto: $r_{\text{per}} = a(1 - \epsilon)$, $r_{\text{af}} = a(1 + \epsilon)$

To znamená, že konstanta v rov. (1.11) má stejnou hodnotu pro všechny planety sluneční soustavy.

Síla působící od Slunce na planetu je tedy dána vzorcem $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_r = m\mathcal{C}r^{-2}\mathbf{r}_o$. Z hlediska Slunce musí být síla stejně velká, ale opačně orientovaná, a tudíž $\mathcal{C} = -GM_\odot$ ($G = \text{const}$):

$$\mathbf{F} = -G \frac{M_\odot m}{r^2} \mathbf{r}_o. \quad (1.14)$$

Příklad: určení \mathcal{C} na základě pohybu Měsíce (Newtonova metoda).

$$\begin{aligned} a \approx r &\doteq 60 R_z \doteq \frac{4 \times 10^9 \times 60}{2\pi} \text{ cm}, \\ T &\doteq 27,3 \text{ dne} \doteq 2\,360\,600 \text{ s}, \\ a_m \frac{4\pi^a}{T^2} &\doteq 0,27 \text{ cm/s}^2 (\text{zrychlení udílené Zemí Měsíci}); \end{aligned}$$

zrychlení g přepočtené na vzdálenost rovnou R_z :

$$g = a_z \left(\frac{r}{R_z} \right)^2 \doteq 987 \text{ cm/s}^2.$$

Můžeme tedy soudit, že pohyb Měsíce je určen stejnou příčinou jako pád kamenů u zemského povrchu.

Zapišme rovnici elipsy v kartézských souřadnicích

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 = 1, \quad (1.15)$$

kde $x = a \cos \bar{\omega}$, $y = a \sin \bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$ označuje excentrickou anomálii).

Mezi polárními a kartézskými souřadnicemi na elipse platí vztah:

$$r \cos \phi = x - a\epsilon = a(\cos \bar{\omega} - \epsilon) \quad (1.16)$$

$$r \sin \phi = y = b \sin \bar{\omega} \quad (1.17)$$

Diferencováním

$$\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi = -a \sin \bar{\omega} d\bar{\omega} \quad (1.18)$$

$$\sin \phi dr + r \cos \phi d\phi = -b \cos \bar{\omega} d\bar{\omega} \quad (1.19)$$

Kombinací rovnic (1.16)×(1.19)−(1.17)×(1.18):

$$\underbrace{r^2 d\phi}_{\mathcal{B} dt} = ab(1 - \epsilon \cos \bar{\omega}) d\bar{\omega}. \quad (1.20)$$

Integrací s počáteční podmínkou $\bar{\omega}|_{(t=0)} = 0$ dostaneme Keplerovu rovnici

$$nt = \bar{\omega} - \epsilon \sin \bar{\omega}, \quad n \equiv \frac{\mathcal{B}}{ab}; \quad (1.21)$$

n má význam středního pohybu planety (levá strana rovnice je úměrná t).

V astronomické terminologii se zavádí veličiny (dráhové elementy)

veličina	význam	hodnota pro Zemi
Ω	délka výstupného uzlu	—
i	sklon dráhy	—
$\bar{\omega}$	argument perihelu	—
a	velká poloosa dráhy	$149,6 \times 10^6$ km
e	excentricita dráhy	0,0167
T_0	okamžiku průchodu perihelem	$\approx 3.$ ledna

To je šest integračních konstant pohybu. Veličiny Ω , i a $\bar{\omega}$ se uvádějí k dané epoše (mění se v důsledku precese). V reálném případě (s dráhovými poruchami) se rovněž využívají orbitální parametry, ale v tom případě jsou pomalu se měnícími funkcemi času.

V řeči energie E , momentu hybnosti l , gravitačního potenciálu V a efektivního potenciálu V_{eff} lze psát

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{V_{\text{eff}}(r, l)} + V(r)
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

Ze vztahu (1.22) pro energii máme

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V] - \frac{l^2}{m^2 r^2}},
 \tag{1.23}$$

a tedy pro čas podél dráhy

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V] - \frac{l^2}{m^2 r^2}}}.
 \tag{1.24}$$

Pro azimutální úhel máme $d\phi = l dt / mr^2$,

$$\phi = \int \frac{lr^{-2} dr}{\sqrt{2m [E - V] - \frac{l^2}{r^2}}}.
 \tag{1.25}$$

Dosud jsme nijak nespécifikovali tvar potenciálu $V(r)$. Lze dokázat, že podmínku uzavřenosti dráhy, $\phi = 2\pi n_1/n_2$ ($n_{1,2}$ přirozená čísla), splňují pouze dvě závislosti: $V \propto 1/r$ (keplerovský potenciál) a $V \propto r^2$ (harmonický oscilátor).

Pro keplerovský potenciál $V = k/r$ ($k = \text{const}$) dostaneme integraci rov. (1.25)

$$\phi = \arccos \frac{lr^{-1} - mkl^{-1}}{\sqrt{2mE + \left(\frac{mk}{l}\right)^2}} + \text{const.}
 \tag{1.26}$$

Literatura k dalšímu studiu: V. Trkal: *Mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa* (Československá akademie věd, Praha, 1956).

1.2 Termodynamika

V této kapitole se hovoří o stavové rovnici degenerovaného Fermiho plynu, v astrofyzice aplikované především na popis bílých trpaslíků a neutronových hvězd.

Zavedeme označení: $n \dots$ číselná hustota baryonů (předpokládáme, že celkový počet baryonů se zachovává); $\varepsilon \dots$ celková hustota energie (včetně klidové, ε/n je pak energie na jeden baryon); $N_i \equiv n_i/n \dots$ abundance i -tého prvku.

První větu termodynamickou zapíšeme ve tvaru

$$\delta Q = d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) + P d\left(\frac{1}{n}\right) - \sum \mu_i dN_i, \quad (1.27)$$

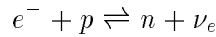
kde $\delta Q = T ds$ je teplo na jeden baryon vyjádřené pomocí teploty^[3] a entropie na jeden baryon, P je tlak, μ_i je chemický potenciál, a $\varepsilon \equiv \varepsilon(n, s, N_i)$. Zjevně

$$P = \frac{\partial \varepsilon/n}{\partial (1/n)} = n^2 \frac{\partial \varepsilon/n}{\partial n}, \quad (1.28)$$

$$T = \frac{\partial \varepsilon/n}{\partial s}, \quad (1.29)$$

$$N_i = \frac{\partial \varepsilon/n}{\partial N_i} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n_i}. \quad (1.30)$$

Příklad: V rovnováze platí $\sum \mu_i dN_i = 0$, a tedy např. v reakci



je

$$dN_e = dN_p = -dN_n = dN_{\nu_e},$$

a tedy

$$\mu_e + \mu_p \rightleftharpoons \mu_n + \mu_{\nu_e}.$$

Vztah termodynamických veličin k hustotě N částic a rozdělovací funkci f částic ve fázovém prostoru:

$$\frac{dN}{d^3x d^3p} = \tilde{\gamma} f \quad (1.31)$$

($\tilde{\gamma} = g/h^3$, $g \dots$ statistická váha stavu, $h \dots$ „elementární“ objem). Odtud pro jednotlivé termodynamické veličiny

^[3]Jistě nehrozí nedorozumění v důsledku stejného označení teploty v této kapitole a oběžné periody v kapitole předchozí.

$$n = \int \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p, \quad (1.32)$$

$$\varepsilon = \int E \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p, \quad E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (1.33)$$

$$P = \frac{1}{3} \int p v \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p, \quad v = \frac{pc^2}{E} \quad (1.34)$$

($m_0 \equiv m_e$ pro elektrony).

Rozdělovací funkci lze vyjádřit v závislosti pouze na energii,

$$f(E) = \frac{1}{\exp[\beta(E - \mu)] \pm 1}, \quad \beta \equiv 1/kT. \quad (1.35)$$

Příklad: Limitní tvar rozdělovací funkce pro $e^{-\beta\mu} \gg 1$, t.j. $f \rightarrow e^{\beta\mu - E}$ (Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení). V případě ideálního plynu je

$$N = \int e^{\beta(\mu - p^2/2m)} 4\pi p^2 d^3x d^3p,$$

a tudíž

$$\begin{aligned} e^{-\beta\mu} &= \frac{4\pi}{N} \frac{g}{h^3} \int e^{-(\beta p^2/2m)} p^2 dp \\ &= \frac{V}{N} (mkT)^3 \gg 1. \end{aligned}$$

Maxwellova-Boltzmannova limita tedy vyžaduje malou hustotu prostředí, $\rho \approx N/V \ll 1$, a vysokou teplotu $T \gg 1$

Pro popis kompaktních hvězd (bílý trpaslík, neutronová hvězda) je relevantní limita zcela degenerovaného Fermiho plynu: ($T \rightarrow 0$, znaménko + v rov. (1.35)). V tomto případě je

$$f(E) = \begin{cases} 1, & E \leq E_F \\ 0, & E > E_F, \end{cases}$$

kde (pro elektrony) $E_F \equiv \mu = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4}$.

Tak dostáváme

$$n_e = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} x^3 \quad (1.36)$$

(zavedli jsme $x \equiv p_F/m_e c$, $\lambda_e \equiv \hbar/m_e c$). Analogicky pro elektronový tlak

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{E} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx \equiv \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \varphi(x), \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[x\sqrt{1+x^2} \left(2x^2/3 - 1 \right) + \ln \left[x + \sqrt{1+x^2} \right] \right], \quad (1.38)$$

a pro hustotu energie

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} (p^2 c^2 + m_e^2 c^4) 4\pi p^2 dp \\ &\equiv \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \chi(x), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[x\sqrt{1+x^2} (1 + 2x^2) - \ln \left[x + \sqrt{1+x^2} \right] \right]. \quad (1.40)$$

Užitečné jsou rozvoje předchozích vztahů v nerelativistické ($x \ll 1$) a relativistické ($x \gg 1$) oblasti:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{15\pi^2} \left(x^5 - \frac{5}{14} x^7 + \frac{5}{24} x^9 \dots \right), & x \ll 1 \\ \frac{1}{12\pi^2} \left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln(2x) \dots \right), & x \gg 1; \end{cases} \\ \chi(x) &= \begin{cases} \frac{1}{3\pi^2} \left(x^3 - \frac{3}{10} x^5 - \frac{3}{56} x^7 \dots \right), & x \ll 1 \\ \frac{1}{4\pi^2} \left(x^4 + x^2 - \frac{1}{2} \ln(2x) \dots \right), & x \gg 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Celková hustota prostředí je i v relativistickém případě určena ionty (neplatilo by to pouze v extrémně relativistickém případě):

$$\rho_0 = \sum n_i m_i = n m_b = n_e m_b / N_e \approx 10^6 x^3 \text{ g/cm}^3 \quad (1.41)$$

(zde $m_b \equiv n^{-1} \sum n_i m_i \approx 10^{-24} \text{ g}$ je střední baryonová hmotnost, $N_e = \frac{1}{2}$ pro vodič).

Z výše uvedených limitních rozvoju φ a χ nalezneme explicitní vyjádření stavové rovnice, jež má tvar polytropy:

$$P = K \rho_0^\gamma, \text{ kde } \gamma \begin{cases} \frac{5}{3}, & x \ll 1 (\rho_0 \ll 10^6 \text{ g/cm}^3), \\ \frac{4}{3}, & x \gg 1 (\rho_0 \gg 10^6 \text{ g/cm}^3). \end{cases}$$

Výše uvedené vztahy lze snadno upravit pro případ degenerovaného plynu neutronů, hraniční případ $x \approx 1$ však potom odpovídá $\rho \approx 10^{16} \text{ g/cm}^3$.

Zmíníme se ještě o tom, jak se celá situace změní, uvážíme-li směs neutronů, protonů a elektronů. Podstatným procesem je rozpad β , $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$, který může probíhat též inverzně: $e^- + p \rightarrow n + \nu$ (elektron musí mít dostatečnou energii, danou rozdílem $(m_n - m_p)c^2 \doteq 1,29 \text{ MeV}$; záleží též na hustotě — při velké hustotě není přímý rozpad možný, protože volné stavy elektronů jsou již obsazené.) V rovnováze platí

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n, \quad (\mu_\nu \approx 0). \quad (1.42)$$

Zavedeme, jako dříve,

$$x_e = \frac{p_F^e}{m_e c}, \quad x_n = \frac{p_F^n}{m_n c}, \quad x_p = \frac{p_F^p}{m_p c}, \quad (1.43)$$

$$E_F^e = \mu_e = \sqrt{(p_F^e c)^2 + m_e^2 c^4}, \dots, \quad (1.44)$$

$$m_e \sqrt{1 + x_e^2} + m_p \sqrt{1 + x_p^2} = m_n \sqrt{1 + x_n^2}. \quad (1.45)$$

Z podmínky elektrické neutrality plyne $n_e = n_p$, t.j.

$$\frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} x_e^3 = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_p^3} x_p^3 \quad (1.46)$$

$$m_e x_e = m_p x_p. \quad (1.47)$$

Pomocí rov. (1.45), (1.47) tedy lze určit $x_e \rightarrow x_p \rightarrow x_n$. Pro stavové veličiny máme

$$P = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \varphi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \varphi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \varphi(x_n), \quad (1.48)$$

$$\varepsilon = \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \chi(x_e) + \frac{m_p c^2}{\lambda_p^3} \chi(x_p) + \frac{m_n c^2}{\lambda_n^3} \chi(x_n), \quad (1.49)$$

$$n = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_p^3} x_p^3 + \frac{1}{3\pi^2 \lambda_n^3} x_n^3. \quad (1.50)$$

Nejmenší hustotu, při níž se již začínají objevovat neutrony, lze odhadnout na základě vztahu (1.45) s $x_n = 0$ (protony předpokládáme nerelativistické, tzn. s $x_p \ll 1$). Dostáváme

$$m_e \sqrt{1 + x_e^2} = m_n - m_p \quad (1.51)$$

a pomocí rov. (1.46), (1.50) plyne z (1.51)

$$n = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} \left[\left(\frac{m_n - m_p}{m_e} \right)^2 - 1 \right]^{3/2} \approx 10^{31} \text{ cm}^{-3}, \quad (1.52)$$

$$\rho_0 \approx n m_p \approx 10^7 \text{ g/cm}^3. \quad (1.53)$$

Literatura k dalšímu studiu: S. L. Shapiro & S. A. Teukolsky: *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* (Wiley-Interscience, New York, 1983).

1.3 Elektrodynamika

V této kapitole zopakujeme základní vztahy klasické elektrodynamiky a zavedeme Stokesovy parametry. Bude to tedy příprava pro pozdější kapitoly o záření v astrofyzice.

V astronomii získáváme naprostou většinu informací pomocí elektromagnetického záření. Vyjdeme proto z Maxwellových rovnic ve tvaru (fyzikální jednotky)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_e \quad (\text{Coulombův zákon}), \quad (1.54)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayův indukční zákon}), \quad (1.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gilbertova podmínka}), \quad (1.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Maxwellův-Ampérův zákon}). \quad (1.57)$$

Zde ρ_e a \mathbf{j}_e zahrnuje veškeré elektrické náboje resp. proudy v systému (vhodné např. pro popis plazmatu). Ty jsou svázány rovnicí kontinuity,

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_e = 0. \quad (1.58)$$

Divergenční rovnice představují počáteční podmínky, jak je zřejmé z jejich vyjádření ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\rho_e) = 0, \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (1.60)$$

(plus okrajové podmínky).

Zbývá zapsat Lorentzovu sílu, určující pohyb jednotlivých nábojů:

$$\mathbf{F}_e = q(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.61)$$

Důsledkem (1.57) je též zákon zachování energie v elektromagnetickém poli,

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}_{\approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \nabla \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Ve vakuu lze psát

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \nabla \times \mathbf{B}, \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E}. \quad (1.64)$$

Diferencováním posledních dvou rovnic a jejich kombinací získáme vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1.65)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (1.66)$$

Obecné řešení vlnové rovnice lze zapsat ve tvaru retardovaného a advancovaného pole,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+(z - ct) + \mathbf{E}_-(z + ct), \quad (1.67)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_+(z - ct) + \mathbf{B}_-(z + ct). \quad (1.68)$$

Z podmínky $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ plyne, že vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou transversální (kolmé ke směru šíření):

$$\mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_\pm}{\partial z} = \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_\pm}{\partial z} = 0. \quad (1.69)$$

Oba vektory jsou kolmé též navzájem, protože z rov. (1.63)–(1.64) plyne

$$\mathbf{B}_\pm = \pm \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_\pm. \quad (1.70)$$

Dosud jsme nediskutovali vlastnosti složek E_x a E_y . K tomu účelu využijeme Fourierovu transformaci polních vektorů.

Připomenutí Fourierovy transformace: Uvažme funkci $f(x)$ z L_2 , t.j.

$$\int_{-inf ty}^{inf ty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

. Spektrálním rozkladem označujeme transformaci

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int f(k) e^{ikx} dk.$$

Formalismu spektrálního rozkladu využijeme na popis elektromagnetických vektorů, přičemž přejdeme ke komplexním proměnným \mathbf{e}_\pm (fyzikální signál je pak reálnou částí komplexních proměnných); např.

$$\mathbf{E}_+(z - ct) = \int \mathbf{e}_+(k) e^{ik(z-ct)} dk,$$

kde $kc = \omega = 2\pi\nu$.

Obecný tvar komplexního signálu lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{e}_+(k) = \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \mathbf{e}_y \quad (1.71)$$

($\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$ jsou amplitudy, ϕ_x, ϕ_y odpovídající fáze — čtyři parametry potřebné k popisu vlny). Reálná část je pak

$$\mathbf{E}_k = \mathcal{E}_x \cos[k(z - ct) + \phi_x] \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \cos[k(z - ct) + \phi_y] \mathbf{e}_y. \quad (1.72)$$

Představme si nyní pozorovatele umístěného v $z = 0$:

$$\mathbf{E}_k = \mathcal{E}_x \cos(\omega t - \phi_x) \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \cos(\omega t - \phi_y) \mathbf{e}_y. \quad (1.73)$$

Vektor \mathbf{E}_k zřejmě opisuje elipsu. Přejdeme při jejím popisu od (x, y) k vhodnějším (x', y') , které jsou dány otočením

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ -\sin \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}.$$

V nových (x', y') a s vhodnou volbou počátku t je

$$\mathbf{E}_k = E_1 \cos \omega t \mathbf{e}_{x'} + E_2 \cos \omega t \mathbf{e}_{y'}. \quad (1.74)$$

Přitom $\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 = E_1^2 + E_2^2 \equiv \mathcal{E}_0^2 \equiv \text{const.}$

Namísto výše uvedených amplitud se zavádějí vhodnější Stokesovy parametry:

$$I = \mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2 = \mathcal{E}_0^2, \quad (1.75)$$

$$Q = \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2 = I \cos \beta \cos 2\chi, \quad (1.76)$$

$$U = 2\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \cos(\phi_y - \phi_x) = I \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad (1.77)$$

$$V = 2\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \sin(\phi_y - \phi_x) = I \sin 2\beta, \quad (1.78)$$

kde $\beta \equiv$ podíl poloos elipsy, $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Speciální tvary vln:

(i) V monochromatické, elipticky polarizované vlně vystupuje pouze rozdíl fází, $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x$.

(ii) V lineárně polarizované vlně je $V = 0$.

(iii) V kruhově polarizované vlně je $Q = U = 0$.

Reálná měření poskytují ustředněné hodnoty:

$$\bar{I} = \langle \mathcal{E}_0^2 \rangle, \quad (1.79)$$

$$\bar{Q} = \langle \mathcal{E}_x^2 - \mathcal{E}_y^2 \rangle, \quad (1.80)$$

$$\bar{U} = 2\langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \rangle \cos \Delta\phi, \quad (1.81)$$

$$\bar{V} = 2\langle \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y \rangle \sin \Delta\phi. \quad (1.82)$$

Pokud přichází záření z většího počtu zdrojů, pak $\mathbf{E}_k = \sum \mathbf{E}_k^{(n)}$. V případě nekoherentního záření je (ze Schwartzovy nerovnosti) $\bar{I}^2 \geq \bar{Q}^2 + \bar{U}^2 + \bar{V}^2$. Takové záření lze rozdělit na část nepolarizovanou ($\bar{Q}_u = \bar{U}_u = \bar{V}_u = 0$) a část plně elipticky polarizovanou ($\bar{I}_p = \sqrt{\bar{Q}_p^2 + \bar{U}_p^2 + \bar{V}_p^2}$).

V astronomii se namísto o intenzitě často hovoří o magnitudě m měřené za analyzátořem záření v určitém úhlu natočení. Odpovídající definice lze zapsat takto:

$$p_Q = m(90^\circ) - m(0^\circ), \quad (1.83)$$

$$p_U = m(135^\circ) - m(45^\circ), \quad (1.84)$$

$$p_V = m^*(135^\circ) - m^*(45^\circ) \quad (1.85)$$

(hvězdička označuje vložení čtvrtvlnné destičky). Význam např. p_Q je patrný ze zřejmého vztahu

$$p_Q = -2,5 \log \frac{I'(90^\circ)}{I'(0^\circ)}. \quad (1.86)$$

Obdobně se odvodí přibližné vztahy

$$Q/I = \pm 0.46 p_Q, \quad (1.87)$$

$$U/I = \pm 0.46 p_U, \quad (1.88)$$

$$V/I = \pm 0.46 p_V, \quad (1.89)$$

kteřé lze využít při praktickém stanovení Stokesových parametrů.

Literatura k dalšímu studiu: M. Born & E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 1964).

1.4 Hydrodynamika

V této kapitole uvedeme několik základních úvah o platnosti hydrodynamického přiblížení, které použijeme při popisu struktury hvězd.

Typická „pozemská“ aplikace hydrodynamických rovnic: obtékání pevného tělesa (loď, turbína, křídlo...); prostředí je elektricky neutrální. Typická „astrofyzikální“ aplikace: ionizované prostředí s důležitým vlivem gravitace, zářivého pole, velmi nestacionární.

Základní předpoklad hydrodynamiky: střední volná dráha ℓ mnohem kratší než makroskopická délková škála, L . Hydrodynamický popis přestává být adekvátní při $\ell \gtrsim L$. Dále lze zavést střední (objemovou) rychlost prostředí \mathbf{u} a doplňkovou náhodnou složku rychlosti \mathbf{w} , takže rychlost individuální částice činí $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

Pokud částice prostředí spolu interagují jen silami krátkého dosahu (neutrální atomy či molekuly), můžeme psát

$$\ell \approx \frac{1}{n\sigma}, \quad (1.90)$$

kde n je číselná hustota částic a σ jejich účinný průřez. V pokojových podmínkách je typicky $n \approx 10^{19} \text{cm}^{-3}$, $\sigma \approx 10^{-15} \text{cm}^2$, a tedy $\ell \approx 10^{-4} \text{cm}$.

Jinak je tomu s fotony. Typická hodnota zářivého účinného průřezu (Thomsonův vzorec) je

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \approx 6,7 \times 10^{-25} \text{cm}^2, \quad r_e \equiv \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (1.91)$$

Často se zavádí zářivý účinný průřez na jednotku hustoty — opacita κ . V případě ionizovaného vodíku je $\sigma_T/m_p \approx 0,4 \text{cm}^2/\text{g}$. (To můžeme porovnat s „opacitou“ pro rozptyl vodíkových atomů: $\sigma/m_p \approx 10^9 \text{cm}^2/\text{g}$. . . střední volná dráha fotonů bývá tudíž ve většině situací mnohem delší.)

Střední volná dráha elektricky nabitých částic je určena jejich efektivním poloměrem (sférou vlivu) r_{eff} , která pro elektrony činí

$$\frac{e^2}{r_{\text{eff}}} \approx m_e w^2 \approx kT. \quad (1.92)$$

Přítom

$$\ell \approx \frac{1}{n_e \pi r_{\text{eff}}^2} \approx \frac{m_e^2 w^2}{n_e e^4}, \quad (1.93)$$

$w \approx \sqrt{kT/m_e}$. V tomto odhadu ovšem nejsou zahrnuty rozptyly do malých úhlů (při velkém srážkovém parametru, $b \gg r_{\text{eff}}$), které ve skutečnosti dominují (síla dalekého dosahu) faktorem $\ln \Lambda \approx b_{\text{max}}/r_{\text{eff}}$ (Coulombův logaritmus). Potřebujeme proto odhadnout hodnotu b_{max} .

Uvažme plazma složené z částic s elektrickým nábojem $Z_i e$ (ionty i -tého druhu) a elektronů. Požadavek elektrické neutrality znamená

$$Z_i n_i = n_e \quad (1.94)$$

(sčítat přes i , pokud je přítomno více druhů iontů současně). Uvažme jeden iont:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho_e, \quad (1.95)$$

$$\rho_e = Z_i e \delta(\mathbf{r}) - n_e e \exp(e\Phi/kT) + n_i Z_i e \exp(-Z_i e\Phi/kT). \quad (1.96)$$

Pokud je elektrostatická energie, $e\Phi$, mnohem menší než termální, kT , rozvineme exponenty do prvních dvou členů a užijeme podmínku (1.94). Obě exponenty se pak redukuje na člen

$$\frac{1}{4\pi} L_D^{-2} \Phi, \quad L_D^{-2} = \frac{4\pi e^2}{kT} (n_e + Z_i^2 n_i), \quad (1.97)$$

kde L_D označuje Debyeovu délku. Rov. (1.96) lze pak přepsat do tvaru

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -4\pi Z_i e \delta(\mathbf{r}) + L_D^{-2} \Phi \quad (1.98)$$

s řešením

$$\Phi = \frac{Z_i e}{r} \exp\left[\frac{-r}{L_D}\right], \quad (1.99)$$

které rychle ubývá s rostoucí vzdáleností (Debyeovo stínění) a splňuje okrajové podmínky

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad \Phi|_{r \rightarrow 0} \approx \frac{Z_i e}{r}. \quad (1.100)$$

To znamená, že coulombický potenciál iontu je odstíněn na vzdálenosti $\gtrsim L_D$, a tedy klademe $b_{\max} \approx L_D$.

Podmínkou platnosti výše použitého rozvoje exponenciál je $n_e L_D^3 \gg 1$. To je patrné ze skutečnosti, že střední elektrostatická energie elektronů činí $e^2 n_e^{1/3}$, a tedy

$$\frac{e\Phi}{kT} \approx (n_e L_D^3)^{-2/3}. \quad (1.101)$$

Výraz $n_e L_D^3$ označuje tzv. plazmový parametr. Představu o Debyeově stínění tedy nelze použít při malé hustotě částic.

Příklad: pohyb elektronu při malé perturbaci x jeho polohy. Vzniká elektrické pole (jako v kondenzátoru) $E = 4\pi n_e e x$ a pohybová rovnice elektrony zní

$$\ddot{x} = -\frac{eE}{m_e} \equiv -\omega_p^2 x,$$

kde $\omega_p^2 = 4\pi n_e e^2 m_e^{-1}$. Vznikají tedy harmonické kmity s plazmovou frekvencí ω_p . Odpovídající frekvence iontů je nepatrná, neboť se redukuje faktorem $\sqrt{m_i/Z_i m_e}$. Typická číselná hodnota pro ω_p je $\approx 6 \times 10^4 n_e^{1/2}$ sec. Tyto oscilace vyhlazují perturbace elektronů na frekvencích $\omega < \omega_p$.

V situaci, kdy hydrodynamický režim není adekvátní, je třeba přejít k popisu pomocí kinetické teorie. Pohyb částic potom můžeme popsat jednočásticovou rozdělovací funkcí $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. V hamiltonovském formalismu je vývoj dán hamiltoniánem H , který si v tomto případě rozdělíme na dva příspěvky — hladký člen H_{sm} a člen popisující (náhodné) srážky H_{ir} :

$$H = H_{\text{sm}} + H_{\text{ir}}. \quad (1.102)$$

Uvažme elementární objem V_6 ve fázovém prostoru s hranicí S_5 . V tom je obsaženo $f d^3x d^3p$ částic. Tok částic přes stěnu S_5 kolmou k x_i je

$$f \dot{x}_i = f \frac{\partial H_{\text{sm}}}{\partial p_i} \quad (1.103)$$

a podobně přes stěnu kolmou ke směru p_i je to

$$f \dot{p}_i = -f \frac{\partial H_{\text{sm}}}{\partial x_i}. \quad (1.104)$$

Představujeme si, že náhlé srážky mohou částice přesouvat nespojitě, a tento efekt zahrneme do srážkového členu \mathcal{S} , jehož explicitní tvar závisí na konkrétním podobě interakce. Tak dostaneme rovnici zachování počtu částic (Boltzmannova rovnice) ve tvaru

$$\int_{V_6} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(f \frac{\partial H_{\text{sm}}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(f \frac{\partial H_{\text{sm}}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] d^3x d^3p = \mathcal{S}. \quad (1.105)$$

Literatura k dalšímu studiu: F. F. Chen: *Úvod do fyziky plazmatu* (Academia, Praha, 1984).